

FREAKE BØLGER OVER VARIABELT DYP

av

ANNE RAUSTØL

AVHANDLING

for graden

MASTER I REALFAGSUTDANNING

(Master of Science and Education)



*Det matematisk- naturvitenskapelige fakultet
Universitetet i Oslo*

Mai 2014

*Faculty of Mathematics and Natural Sciences
University of Oslo*

FREAKE BØLGER OVER VARIABELT DYP

av

ANNE RAUSTØL

Sammendrag

Det er kjent både fra eksperimentelle og numeriske resultater, at langkammede bølger som propagerer på grunt vann over en plan variabel bunn mot grunnere vann, har større sannsynlighet for freake bølger ved den grunne delen av bunnen enn ellers i domenet. I tillegg er det kjent fra numeriske resultater at langkammede bølger som propagerer på dypere vann over en plan variabel bunn mot mindre dypt vann, vil ha mindre sannsynlighet for freake bølger ved den samme posisjonen enn ellers i domenet. Med bakgrunn i dette har vi, i denne avhandlingen, vært ute etter å finne transisjonen mellom disse to regimene på den grunne delen av en variabel plan bunn. Vi har utført eksperimenter med svakt ikke-lineære langkammede bølger som har propagert fra dypere vann rett inn mot dybekurvene til en variabel bunn. Steppet som utgjorde den variable bunnen består av en oppadgående skråning, deretter en horisontal del etterfulgt av nedadgående skråninger. Den oppadgående og den nedadgående skråningen hadde samme stigningstall. Dypene vi har sett på, ligger mellom $k_ph = 0,54$ og $k_ph = 1,60$ på den grunne delen av dette steppet. Resultatene viste at transisjonen mellom de to regimene var ved k_ph mellom 1,44 og 1,60 på den grunne delen av steppet.

Anerkjennelse

Først og fremst ønsker jeg å takke professor Karsten Trulsen som har vært min veileder på denne avhandlingen for hans oppfølging, støtte og store entusiasme gjennom hele arbeidet. I tillegg vil jeg takke han for troen han har hatt på at en lektorstudent kan klare en mastergrad i fluidmekanikk, samt for entusiasmen og støtten han har vist med tanke på at en lektorstudent skal få ta en faglig mastergrad. I tillegg ønsker jeg å takke Tore Magnus Arnesen Taklo og laboratorieingeniør Olav Gundersen for hjelp og støtte i laboratoriearbeidet.

Takk også til Matematisk Institutt for anledning til å gjennomføre arbeidet med denne avhandlingen.

Videre ønsker jeg å takke mine foreldre, Ingvild og Arne Kjell Raustøl for deres støtte og oppmuntring gjennom hele studietiden. Den entusiasmen og interessen de har vist for mitt studie har vært uvurderlig. Det har føltes som et stort privilegium og en kuriositet å få jobbe på det samme laboratoriet som min far arbeidet med hovedfaget sitt på for mange år siden. En spesiell takk gir jeg til min mor for språklig veiledning i ferdigstillingen av denne avhandlingen.

I tillegg ønsker jeg å takke mine venner, studiekamerater og resten av familien for deres støtte gjennom denne prosessen.

Sist, men definitivt ikke minst, ønsker jeg å takke min venninne og studiekamerat Lisa Bæverfjord Rye for mange og lange timer på lesesalen, for hyggelige, oppmuntrende og faglige samtaler, for godt og utviklende samarbeid gjennom hele det siste året på masterstudiet (og for en tur til Bunnpris i ny og ne). Du har vært med på å gjøre tiden på masterstudiet til en uforglemmelig og minnerik tid!

Denne masteravhandlingen ble støttet av NFR/UiO prosjekt 214556/F20 for aktivitetene i laboratoriet.

Anne Raustøl

Oslo, mai 2014

Innhold

Sammendrag	i
Anerkjennelse	iii
1 Innledning	1
2 Teori	7
2.1 Bølgeegenskaper	7
2.2 Stokastisk beskrivelse av overflatehevning	8
2.3 Smalbåndet prosess	10
2.4 Bootstrap med konfidensintervall	12
2.4.1 Konfidensintervall	12
2.4.2 Bootstrap-metoden	13
2.5 Overskridelsessannsynlighet	13
2.6 Bevaring av energiflukstetthet og Greens lov	14
2.7 JONSWAP-spekter	15
3 Analytiske metoder	17
3.1 Refleksjon av bølger over et step	17
3.1.1 Refleksjon over et kvadratisk step	17
3.1.2 Refleksjon over et skrånende step	21
3.2 Langsamt modulerte ikke-lineære bølger på endelige dyp til andre orden . .	27
3.2.1 Kinematisk randbetingelse	28
3.2.2 Dynamisk randbetingelse	28
3.2.3 Laplace ligning	28
3.2.4 Kinematisk randbetingelse på bunnen	28
3.2.5 Rekkeutvikling	29
3.2.6 Flerskalaanalyse	29
3.2.7 Randverdiproblemet til andre orden	30
3.2.8 Første ordens problem, skalert og rekkeutviklet	30
3.2.9 Andre ordens problem, skalert og rekkeutviklet	32
3.2.10 Oppsummering av overflatehevningen til andre orden	37
3.2.11 Statistisk beskrivelse	37
4 Eksperimentelt arbeid	43
4.1 Forarbeid	43
4.1.1 Draupner	43
4.1.2 MARIN	46
4.2 Eksperimentene	48

4.2.1	Oppsett	48
4.2.2	Prober	49
4.3	Overflatehevning	51
4.3.1	Oppstartseffekter	51
4.3.2	Filter	51
4.3.3	Repeterbarhet	54
5	Resultater	55
5.1	Oversikt over alle tidsseriene	55
5.2	Punktestimat	56
5.3	Bootstrap-beregninger	63
5.4	Overskridelsessannsynlighet	70
6	Diskusjon	75
6.1	Oversikt over alle tidsserier	75
6.2	Punktestimat	77
6.3	Bootstrap-beregninger	79
6.4	Overskridelsessannsynlighet	79
6.5	Videre arbeid	80
7	Konklusjon	83
A	Eksperimentelt oppsett	85
A.1	Inputfiler til bølgegeneratoren	85
A.2	Kvalitetssikring av prober	85
A.3	Filtre	87
A.3.1	RemoveDropouts	87
A.3.2	InterpolateDropouts	87
A.3.3	RemovePeaks	88
A.3.4	InterpolatePeaks	88
A.3.5	RemoveSpikes	89
A.3.6	InterpolateSpikes	90
B	Resultater	91
B.1	Konfidensintervall	91

Kapittel 1

Innledning

Freake bølger er bølger som er mye større enn det man forventer ut fra havforholdene man observerer (Ochi, 1998). Det har blitt gjort en del observasjoner av freake bølger på havet. Mange av disse bølgene har resultert i store skader og forlis av båter, og har av den grunn blitt veldig omdiskutert. I Norge er observasjonen av Nyttårsbølgen på Draupner-plattformen en av de mest kjente (Haver, 2004).

De klassiske kriteriene for freake bølger er at bølgehøyden skal være minst to ganger så stor som den signifikante bølgehøyden, $H > 2H_s$, eller at amplituden skal være minst $5/4$ så stor som den signifikante bølgehøyden, $A > 1,25H_s$ (Dysthe *et al.*, 2008). Den signifikante bølgehøyden er definert som fire ganger standardavviket til overflatehevningen, $H_s = 4\sigma$. Flere fysiske mekanismer foreslås som forklaring på utviklingen av freake bølger: (1) dispersiv og geometrisk fokusering av bølgepakker med forskjellig hastighet og retning; (2) ikke-lineære mekanismer på grunn av Benjamin–Feir ustabilitet og vekselvirkning mellom kryssende bølgetog; (3) interaksjon mellom bølger og variable bunn- og strømforhold (Dysthe *et al.*, 2008; Kharif *et al.*, 2009).

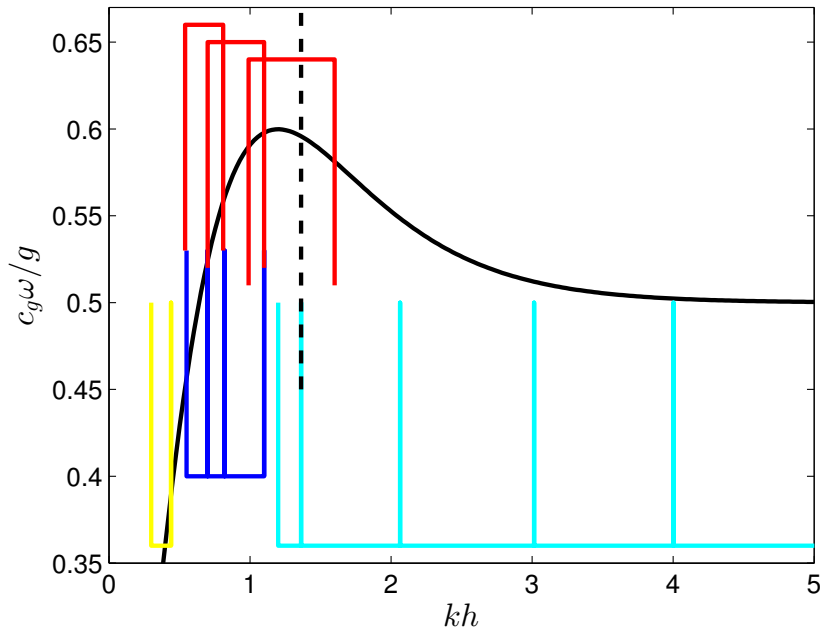
I denne avhandlingen ønsker vi å se på utviklingen av freake bølger når langkammede bølgefelt propagerer rett inn mot dybekurvene til en variabel plan bunn.

Overflatebølger som propagerer fra dypere til grunnere vann kan beskrives ved stråleteori. Teorien sier at energifluksen er bevart langs et «strålerør» hvor strålene er definert som strømlinjene til bølgetallsvektoren for stasjonære og ikke-uniforme dybdeforhold (Gjevik *et al.*, 2010). Som en konsekvens av dette blir bølgelengden kortere med en korresponderende forandring i gruppehastighet, amplitude og steilhet (Goda, 2000). Greens lov, som er den asymptotiske grensen av denne stråleteorien for ekstremt grunt vann, sier også at som en konsekvens av bevaring av energifluks vil amplituden til langkammede bølger som kommer rett inn på dybdekurvene, øke litt omvendt proporsjonalt med fjerderoten av dybden (Lamb, 1932, Art.185).

Den dimensjonsløse gruppehastigheten for lineære tyngdebølger gitt som

$$\frac{c_g \omega}{g} = \frac{1}{2} \left(\tanh(kh) + kh \operatorname{sech}^2(kh) \right) \quad (1.1)$$

Grafen til denne ligningen er plottet som den svarte kurven i figur 1.1. Her kan man se at den dimensjonsløse gruppehastigheten har et lokalt maksimum med $kh \approx 1,2$. For små dyp vil gruppehastigheten gå asymptotisk mot null som kh , mens for store dyp vil gruppehastigheten gå mot 0,5. Vi forventer derfor at for bølger som kommer inn mot en



Figur 1.1: Gruppehastighet som funksjon av kh (—), dybden $kh = 1,363$ (— —). Trulsen *et al.* (2012): «case 1», «case 2» og «case 3» rød heltrukken linje (—). Gramstad *et al.* (2013): simuleringer blå heltrukken linje (—) i tillegg til nevnte tre «case». Zeng & Trulsen (2012): bølgene kommer fra dyp $kh = 10$ som ikke er vist i denne figuren, grunn del vist med cyan heltrukken linje (—). Sergeeva *et al.* (2011), gul heltrukken linje (—).

strand for $kh < 1,2$ vil amplituden øke litt tilsvarende Greens lov. Vi forventer også at for bølger som kommer fra dypere vann $kh > 1,2$ inn på grunnere vann vil amplituden først avta litt før den begynner å øke litt. De fargede kurvene i figuren representerer nyere forskning på langkammede bølger som kommer vinkelrett inn mot plane bunnforhold. Disse arbeidene har vist at skjevheten, kurtosen og freakbølgesannsynligheten er sterkt påvirket av variabelt dyp.

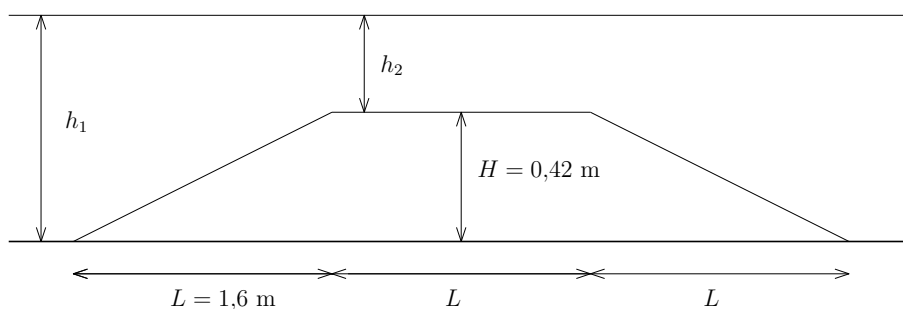
Den gule heltrukne linjen i figur 1.1 viser til Sergeeva *et al.* (2011). I denne artikkelen ble det undersøkt hvorvidt et langkammert irregulært bølgefelt som propagerte over en variabel bunn på ekstremt grunt vann, ville ha økt forekomst av freake bølger sammenlignet med et lignende bølgefelt som propagerte over konstant dyp. Forfatterne implementerte en videreutviklet Korteweg–de Vries ligning (kalt variabel koefisient Korteweg–de Vries ligning). Denne gjelder for svakt ikke-lineære og svakt dispersive bølger som propagerer over svakt variabelt dyp. Det ble gjennomført to ulike simuleringer av bølgefelt med forskjellig initiell steilhet; $\epsilon = 5 \times 10^{-3}$ og $\epsilon = 1 \times 10^{-2}$. Bølgene propagerte over: (i) konstant dyp; (ii) tre ulike skrånende bunner som gikk fra dypere til grunnere vann; (iii) en skrånende bunn som gikk fra grunnere til dypere vann. På den dype delen av skråningene var $kh = 0,44$ og på den grunne delen var $kh = 0,3$. Resultatene fra beregningene av skjevhet, kurtose og overskridelsessannsynlighet for de ulike tilfellene viste at kurtosen øker når bølgene propagerer inn på grunnere vann. I tillegg fikk kurtosen et lokalt maksimum nær starten på den grunne siden av skråningen. Hvordan dette utviklet seg var avhengig av steilheten til bølgene. De fant i tillegg at det var større sannsynlighet for store bølger når bunnen varierte fra dypere til grunnere vann enn dersom dypet var konstant eller varierte

fra grunnere til dypere vann.

Trulsen *et al.* (2012) er eneste eksperimentelle resultat som viser maksimum for ekstrembølgestatistikk nær en grunne. De røde heltrukne linjene i figur 1.1 angir dette arbeidet. Det ble her gjennomført beregninger av konfidensintervall for varians, skjevhet og kurtose samt overskridelsessannsynlighet på 3 ulike eksperimentelle resultater av langkammede, irregulære bølger som propagerte over en skrånende bunn på dypt vann fra laboratoriet MARIN i Nederland (Bunnik, 2010). De tre bølgefeltene hadde en initiell steilhet på henholdsvis 0,057; 0,038 og 0,028 samt et dyp på henholdsvis $kh = 1,6$; 1,1 og 0,81 på den dype siden og $kh = 0,070$; 0,14 og 0,24 på den grunne. Resultatene fra alle tre eksperimentene viste at det utviklet seg et lokalt maksimum for kurtose og skjevhet nær den grunne delen av skråningen. I tillegg fant man at på de samme plassene som det var lokale maksimum for skjevhet og kurtose var det også lokale maksimum for store bølgeamplituder.

I Zeng & Trulsen (2012) ble utviklingen av freake bølger i et bølgefelt med langkammede bølger som propagerte på endelige dyp inn mot en lang skråning, undersøkt. Ikke-lineær Schrödinger-ligning med variable koeffisienter og et «shoaling»-ledd (ledd som tar hensyn til bunnens stigningstall) for langsomt varierende dyp ble implementert. De turkise heltrukne linjene i figur 1.1 viser til dette arbeidet. Tidligere funn har vist at den kritiske dybden for at smalbåndet langkammede bølger kan være gjenstand for modulasjonsustabilitet, er gitt ved $kh \approx 1,363$. Med motivasjon i dette ble det utført simuleringer på dyp som var omtrent lik dette, eller dypere. Grunnen til valget av lang skråning ble forklart med at man hadde et ønske om at det ble opparbeidet likevekt for de statistiske parameterne også oppover skråningen. Det ble simulert tre ulike bølgetog med ulik Benjamin–Feir indeks ($BFI = \epsilon/\delta$, der ϵ er steilhet og δ er båndbredde) som propagerte over fem ulike skråninger. Dypet i forkant av skråningen var $kh = 10$ for alle simuleringene, mens dypet på den grunne delen av skråningen var henholdsvis $kh = 1,2$; 1,363; 2,065; 3,015 og 4,003. Resultatene viste at kurtosen og skjevheten ble redusert for minkende dyp og fikk et lokalt minimum der den grunne delen av skråningen begynte. Etter en viss distanse stabiliserte de seg til en likevektsverdi. For $kh = 1,2$ gjorde skjevheten et hopp like etter det lokale minimumet den fikk ved den grunne delen av skråningen, og endte opp med en likevektsverdi høyere enn den for $kh = 1,363$ og $kh = 2,065$.

Som en videreføring av resultatene i Trulsen *et al.* (2012) ble det i Gramstad *et al.* (2013) brukt en standard en-dimensjonell Boussinesq-ligning med forbedret lineær dispersjon. De blå og røde heltrukne linjene i figur 1.1 angir dette arbeidet. Boussinesq-ligningen beskriver svakt ikke-lineære og svakt dispersive bølger på grunt vann. Punkttestimat for kurtosen og skjevheten samt freakbølgesannsynligheten ble beregnet for langkammede bølger som propagerte inn mot ulike step. Gramstad *et al.* (2013) er det eneste arbeidet som har benyttet en bunn som består av et step med en oppadgående skråning, deretter en horisontal del etterfulgt av en nedadgående skråning. Tilfellene som ble undersøkt var $kh = 1,06$ på den dype delen av domenet, samt tre tilfeller av dyp på den grunne delen: $kh = 0,55$; 0,70 og 0,82. I tillegg ble det kjørt simuleringer for tilsvarende tilfeller som ble undersøkt eksperimentelt i Trulsen *et al.* (2012). Resultatene viste at bølger som propagerte fra dypere til grunnere vann, opplevde en signifikant økning av skjevhet, kurtose og freakbølgesannsynlighet. I tillegg ble det dannet et lokalt maksimum av disse verdiene ved begynnelsen av den grunne delen av steppet. Disse resultatene stemmer overens med funnene i Sergeeva *et al.* (2011). Verdiene for skjevhet, kurtose og freakbølgesannsynlighet sank over den grunne delen av steppet og på den nedadgående skråningen. For noen av tilfellene ble det dannet et svakt lokalt minimum for kurtose og skjevhet ved den nedadgående skråningen. I tillegg ble det observert at intensiteten av freake bølger ble



Figur 1.2: Skisse av rampe som skal plasseres på bunnen av bølgetanken. H høyde til rampe, h_1 dypt vanndyp, h_2 grunt vanndyp, $\frac{\partial h}{\partial x} = 0,2625$.

fremkalt av tilstrekkelig grunt vann på den grunne delen av steppet og tilstrekkelig bratt skråning. Videre ble det funnet at dersom vannet på den grunne delen av steppet ble dypere ville det lokale maksimumet bli borte og man observerte kun en gradvis overgang fra et stabilt regime til et annet.

Med bakgrunn i tidligere arbeider ser det ut til at det er to regimer, et for grunt vann der kurtosen og skjevheten får et lokalt maksimum ved den grunne delen av skråningen, og et for dypere vann der kurtosen og skjevheten får et lokalt minimum på samme plass. De gule, blå og røde kurvene i figur 1.1 viser til det grunne regimet, mens den turkise kurven viser til det dype regimet. I denne avhandlingen ønsker vi derfor å undersøke om vi kan finne transisjonen mellom disse to regimene. Vi skal se på sannsynligheten for at freake bølger oppstår for et irregulært bølgetog som propagerer over en variabel bunn. Dypet skal gå fra en lav mot en høyere kh på den grunne delen av steppet, samt ha en høy kh i den dype delen av tanken før steppet. På grunn av den inhomogene dybden må man vurdere den signifikante bølgehøyden lokalt, noe som medfører at freakebølgekriteriet også må sees på lokalt.

Det skal utføres eksperimenter i bølgetanken på Hydrodynamisk Laboratorium med et step festet til bunnen med mål som i figur 1.2. Steppet skal bestå av to skrå og en horisontal del, hver med samme lengde L . Den skal ha høyde H . Vanndypet utenfor steppet skal være h_1 og vanndypet over toppen av steppet skal være $h_2 = h_1 - H$. Ved å forandre perioden til bølgene som propagerer over steppet eller/og vanndypet i tanken skal ulike tilfeller for dypvannsregimet samt overgangen mellom dypt- og gruntvannsregime undersøkes. De uthevede periodene i tabell 1.1 og tabell 1.2 viser eksperimentene som skal utføres.

Bølgene som skal propagere over steppet skal være fra JONSWAP-spekteret med «peak enhancement» faktor $\gamma = 3,3$ fordi vi ønsker realistiske havbølger i bølgetanken. Disse bølgene er svakt ikke-lineære. Amplitudene må kalibreres slik at ikke bølgene bryter eller at steppet blir tørrlagt.

I forkant av det eksperimentelle arbeidet må det undersøkes hvor lange tidsserier som trengs for å få signifikant bølgestatistikk for kurtose og avvik for overskridelsessannsynlighet fra Rayleigh-fordelingen ved samme sannsynlighetsnivå som i Trulsen *et al.* (2012).

Arbeidet med denne avhandlingen ble gjennomført parallelt med et annet mastergradsarbeid, utført av Lisa Bæverfjord Rye. Ryes avhandling omhandlet freake bølger i kryssende sjø med to motsatt rettede bølgesystemer. Rye og jeg samarbeidet om det eksperimentelle arbeidet i begge avhandlingene, samt forarbeidet og designet av eksperimentene.

T_p (s)	λ_1 (m)	$k_1 h_1$	$c_{g1}\omega/g$	$k_2 h_2$	$c_{g2}\omega/g$	L/λ_1
0,4	0,25	12,6	0,5	2,08	0,548	6,61
0,5	0,39	8,05	0,5	1,44	0,592	4,59
0,6	0,562	5,59	0,5	1,11	0,598	3,54
0,7	0,765	4,11	0,502	0,911	0,579	2,9
0,8	0,996	3,16	0,51	0,774	0,549	2,47
0,9	1,25	2,52	0,526	0,675	0,515	2,15
1,0	1,51	2,08	0,548	0,6	0,482	1,91
1,1	1,78	1,76	0,569	0,54	0,451	1,72

Tabell 1.1: $L = 1,6$ m, $H = 0,42$ m, $h_1 = 0,5$ m. Indeks 1 angir dypt vann, indeks 2 angir grunt vann.

T_p (s)	λ_1 (m)	$k_1 h_1$	$c_{g1}\omega/g$	$k_2 h_2$	$c_{g2}\omega/g$	L/λ_1
0,4	0,25	15,1	0,5	4,53	0,501	6,41
0,5	0,39	9,66	0,5	2,91	0,514	4,12
0,6	0,562	6,71	0,5	2,08	0,548	2,94
0,7	0,765	4,93	0,5	1,6	0,581	2,27
0,8	0,998	3,78	0,503	1,31	0,598	1,85
0,9	1,26	3	0,512	1,11	0,598	1,57
1,0	1,54	2,45	0,529	0,968	0,587	1,37
1,1	1,83	2,06	0,549	0,86	0,57	1,22

Tabell 1.2: $L = 1,6$ m, $H = 0,42$ m, $h_1 = 0,6$ m. Indeks 1 angir dypt vann, indeks 2 angir grunt vann.

Hovedfokuset i denne avhandlingen er på det eksperimentelle arbeidet. Kapittel 2 tar for seg det teoretiske rammeverket som ligger til grunn for beregningene som utføres på de eksperimentelle dataene. I kapittel 3 går vi gjennom utledning av refleksjonen og transmisjonen et skrånende step vil gi. Denne utledningen gjelder kun på ekstremt grunt vann, men vi kan likevel anta at det gir et bilde av hvordan refleksjonen fra steppet er i praksis. Videre går vi gjennom pertubasjonsanalyse til andre orden for langsomt modulerte bølger på endelig dyp. Resultatene fra dette benyttes til å utlede en analytisk skjevhet og kurtose til andre orden som er sammenlignbare med de eksperimentelle resultatene. Kapittel 4 presenterer designet av eksperimentet, det eksperimentelle oppsettet, samt bearbeidingen som må gjøres av rådataene før de kan benyttes til statistiske beregninger. I kapittel 5 legges resultatene fra de statistiske beregningene fram og det gjøres sammenligninger med tidligere forskning. Til slutt diskuteres resultatene samt avvik fra de analytiske løsningene i kapittel 6.

Kapittel 2

Teori

Det teoretiske rammeverket som er brukt i forarbeidet og postprosesseringen av de eksperimentelle dataene, blir presentert nedenfor. Kapittelet er delt i syv delkapitler. Det første delkapittelet tar for seg en gjennomgang av parametere som beskriver ulike egenskaper ved et bølgefelt. Videre gjennomgås den stokastiske beskrivelsen av overflatehevningen etterfulgt av hva som definerer en smalbåndet prosess. Det fjerde delkapittelet tar for seg bootstrap-metoden for å finne konfidensintervall, mens det femte forklarer overskridelses-sanssynlighet. I det sjette delkapittelet gjennomgås en utledning av Greens lov fra bevaring av energiflukstetthet før det i sjuende delkapittel forklares hva et JONSWAP-spekter er.

2.1 Bølgeegenskaper

For å beskrive ulike egenskaper til bølger brukes ofte forskjellige dimensjonsløse parametere. Nedenfor gjennomgås noen av disse som vi bruker for å beskrive bølgene i eksperimentene i denne avhandlingen.

For det første har vi et mål på hvor bratte bølgene er. Dette kalles steilhet og betegnes med ϵ . Steilheten finner man ved å dele koeffisienten foran fasefunksjonen (som er enten eksponentiell eller trigonometrisk) til andre orden for overflatehevningen til Stokes bølger på koeffisienten foran fasefunksjonen til første orden. Stokes bølger på dypt vann er typisk gitt som

$$\eta = a \left(\cos \theta + \frac{1}{2} (ka) \cos 2\theta + \mathcal{O}((ka)^3) \right) \quad (2.1)$$

Den karakteristiske steilheten til et bølgefelt er dermed gitt som

$$\epsilon = k_c a_c \quad (2.2)$$

der k_c er karakteristisk bølgetall og a_c er karakteristisk amplitude for bølgefeltet. Steilheten sier noe om ikke-lineariteten til bølgene.

Karakteristisk bølgetall k_c kan velges på forskjellige måter. I denne avhandlingen velger vi å sette k_c til k_p som er peak bølgetall. Peak bølgetall er det bølgetallet som korresponderer med maksimumsverdien til frekvensen, ω_p . For å finne peak bølgetallet kan man bruke den lineære dispersjonsrelasjonen.

$$\omega_p^2 = k_p g \tanh k_p h \quad (2.3)$$

Den karakteristiske amplituden defineres her som

$$a_c = \sqrt{2}\sigma \quad (2.4)$$

der σ er standardavviket til overflatehevningen.

Som et alternativ til ϵ har vi Ursell-parameteren. Denne finner man på samme måte som steilheten, men nå for Stokes bølger på vilkårlig dyp. Ursell-parameteren er gitt som

$$Ur = \frac{a_c k_p}{(k_p h)^3} \quad (2.5)$$

På samme måte som steilheten, sier Ursell-parameteren noe om ikke-lineariteten til bølger.

Karakteristisk dimensjonløs parameter for dypet er gitt som $k_p h$. Det er denne som tradisjonelt definerer om vi er på grunt eller dypt vann. $k_p h \ll 1$ anses som grunt vann og $k_p h \gg 1$ anses som dypt vann (Gjevik *et al.*, 2010).

Som nevnt i delkapittel 2.2 er standardavviket en vanlig måte å måle variasjoner rundt forventningsverdien på. Når vi snakker om bølger, blir standardavviket et fornuftig mål på variasjoner i overflatehevningen. Som nevnt i introduksjonen er det vanlig å betegne 4 ganger standardavviket som den *signifikante bølgehøyden* (Krogstad & Arntsen, 2000).

$$H_s = 4\sigma \quad (2.6)$$

2.2 Stokastisk beskrivelse av overflatehevning

En *stokastisk prosess* $X(t)$ er en regel som tilordner en funksjon $x_j(t)$ til hvert utfall j . En *stokastisk variabel* X er en regel som tilordner et tall x_j til hvert utfall j (Trulsen, 2006). For en stokastisk variabel kan vi tenke oss at dette også er en regel som tilordner en funksjon, men at vi her ikke vet noe om funksjonen. Vi har kun informasjon om resultatet funksjonen gir. Det viser seg at vi må finne fordelingen av disse resultatene for å si noe om selve prosessen (Krogstad & Arntsen, 2000).

Vår intuisjon og erfaring tilsier at bølgene på havet er uforutsigbare og tilfeldige under ellers identiske forhold som vind, etc. Som følge av dette tenker vi oss at bølgebevegelsen er en *stokastisk prosess* med forskjellige utfall, *realisasjoner* (Trulsen, 2006).

En typisk bølgebevegelse er gitt ved

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} a e^{i\theta} + c.c. \quad (2.7)$$

her kan fasen θ og/eller amplituden a være stokastiske variabler mens overflatehevningen er den stokastiske prosessen. *c.c.* betyr den komplekskonjugerte.

Den *kumulative fordelingsfunksjonen* for en reell tilfeldig funksjon er gitt som

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad (2.8)$$

hvor X representerer både funksjonen og verdien til fordelingen, og P angir sannsynligheten for at resultatet er mindre eller lik x .

Den deriverte av fordelingsfunksjonen kalles *sannsynlighetstetthetsfunksjonen*

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (2.9)$$

Sannsynlighetstetthetsfunksjonen har følgende egenskaper:

$$f_X(x) \geq 0 \quad (2.10)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1 \quad (2.11)$$

Forventningsverdien til en stokastisk variabel X er definert som den vektete middelverdien til prosessen.

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (2.12)$$

Tilsvarende har vi forventningsverdien for en funksjon $g(X)$ for den stokastiske variabelen X .

$$\mu = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx \quad (2.13)$$

Variansen til en stokastisk variabel X er definert som

$$\sigma^2 = \text{Var}[X] = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \quad (2.14)$$

Standardavviket er gitt som kvadratroten til variansen.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \quad (2.15)$$

Variansen og standardavviket sier noe om spredningen av verdiene i utvalget i forhold til forventningsverdien.

Videre er *n'te moment* til en stokastisk variabel gitt som

$$m_n = E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx \quad (2.16)$$

Momentet brukes blant annet til å forenkle uttrykkene for skjevheten og kurtosen.

Skjevheten til en stokastisk variabel X er definert som

$$\gamma = \frac{E[(X - \mu)^3]}{\sigma^3} = \frac{m_3 - 3\sigma^2\mu - \mu^3}{\sigma^3} \quad (2.17)$$

Skjevheten er et mål på i hvilken grad fordelingen vi ser på, heller i den ene eller andre retningen rundt forventningsverdien, altså hvor asymmetrisk verdiene i utvalget er. Dersom

$\gamma = 0$ er fordelingen helt symmetrisk. Dersom $\gamma < 0$ er fordelingen usymmetrisk med tyngde mot venstre, og dersom $\gamma > 0$ er fordelingen usymmetrisk med tyngde mot høyre.

Kurtosen til en stokastisk variabel X er definert som

$$\kappa = \frac{E[(X - \mu)^4]}{\sigma^4} = \frac{m_4 - 4\gamma\sigma^3\mu - 6\sigma^2\mu^2 - \mu^4}{\sigma^4} \quad (2.18)$$

Kurtosen sier noe om i hvilken grad verdiene i utvalget er samlet tett rundt eller langt unna forventningsverdien. Dersom $\kappa = 3$ er fordelingen normalfordelt. Dersom $\kappa < 3$ er det mer tyngde rundt sentrum enn normalt, og dersom $\kappa > 3$ er det mer tyngde i «halene» enn normalt.

I denne avhandlingen har vi brukt Matlab-funksjonene **mean**, **var**, **skewness** og **kurtosis** for å beregne disse statistiske parameterne.

Som nevnt ovenfor betrakter vi havet som en stokastisk prosess som er avhengig av tid og rom. Alle egenskaper nevnt ovenfor som gjelder for en stokastisk variabel, gjelder også for en stokastisk prosess. Som et eksempel har vi forventningsverdien til en stokastisk prosess gitt ved:

$$\mu(t) = E(Z(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} z f(z, t) dx \quad (2.19)$$

I tillegg definerer vi autokorrelasjonsfunksjonen som gjelder for en stokastisk prosess.

$$R(t_1, t_2) = E[Z(t_1)Z(t_2)] = \iint_{-\infty}^{\infty} z_1 f(z_1, z_2, t_1, t_2) dz_1 dz_2 \quad (2.20)$$

En *svakt stasjonær prosess* er en prosess der forventningsverdien er konstant i tid $E(Z(t)) = \mu$ og autokorrelasjonsfunksjonen kun avhenger av tidsdifferansen $\tau = t_2 - t_1$ (Trulsen, 2006).

$$R(t_1, t_2) = E[Z(t_1)Z(t_2)] = R(\tau) \quad (2.21)$$

En ergodisk prosess er en prosess der ensemblemidlelet er det samme som tids-middel eller rom-middel. Et ensemble er en samling av realisasjoner. Dersom en prosess er ergodisk medfører dette at de statistiske egenskapene til prosessen kan antas at er de samme for hele ensemblet (Ochi, 1998). Dermed kan statistikken for en realisasjon sies å gjelde generelt for eksempel den havtilstanden realisasjonen skal beskrive.

I denne avhandlingen antar vi at overflatehevningen vi ser på, er en ergodisk og svakt stasjonær prosess. Dette er antatt og ikke begrunnet.

2.3 Smalbåndet prosess

En smalbåndet prosess er en prosess der frekvensspekteret er samlet rundt en karakteristisk frekvens ω_c (Ochi, 1998). Frekvensspekteret til en svakt stasjonær prosess er definert som Fourier-transformen av autokorrelasjonsfunksjonen til overflatehevningen (Trulsen, 2006).

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (2.22)$$

Den inverse transformen er gitt som

$$R(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (2.23)$$

$$(2.24)$$

Et estimat på båndbredden δ er typisk gitt som

$$\delta = \frac{\hat{\sigma}}{\omega_c} \quad (2.25)$$

der $\hat{\sigma}$ er standardavviket til spektraltetthetsfunksjonen (sier noe om hvor bred toppen av spekteret er) (Trulsen, 2006).

En smal båndbredde er definert som

$$\delta \ll 1$$

En overflatehevning kan typisk være gitt som

$$\eta(t) = \sum_j a_j(t) \cos(\omega_j t) + b_j(t) \sin(\omega_j t) = B(t) e^{i\omega_c t} + c.c. \quad (2.26)$$

der $a_j(t)$ og $b_j(t)$ er statistisk uavhengige stokastiske variable som er Gaussisk fordelt med forventning $\mu = 0$ og varians σ^2 , ω_c er den karakteristiske frekvensen og *c.c.* angir den komplekskonjugerte.

$B(t)$ kan dermed uttrykkes ved $a_j(t)$, $b_j(t)$, ω_j og ω_c .

$$B(t) = \sum_j (a_j(t) + ib_j(t)) e^{-i(\omega_j - \omega_c)t} \quad (2.27)$$

Amplituden $A(t)$ for en overflatehevning er gitt som $A(t) = |B(t)|$.

$$A(t) = |B(t)| = \sum_j |a_j(t) + ib_j(t)| |e^{-i(\omega_j - \omega_c)t}|$$

For en ekstremt smalbåndet prosess blir absoluttverdien av bidraget fra frekvensen omtrent 1 fordi $\omega_j - \omega_c \approx 0$. Amplituden varierer da langsomt i tid og kan uttrykkes som $A(t) = |a(t) + ib(t)|$. Dersom man tar utgangspunkt i at $a(t)$ og $b(t)$ er Gaussisk fordelt kan det vises at $A(t)$ er Rayleigh-fordelt. Sannsynlighetstetthetsfunksjonen for en Gaussisk overflatehevning er gitt som:

$$f(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \quad (2.28)$$

Videre ønsker vi å finne sannsynligheten for at amplituden $A = |a + ib|$ er mindre enn en gitt terskelverdi z : $P\{A = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2} \leq z\}$.

$$F_A(a, b) = \iint_{\sqrt{a^2 + b^2} \leq z} \frac{1}{2\sigma^2\pi} e^{-\frac{(a^2 + b^2)}{2\sigma^2}} da db$$

Skriver om til polarkoordinater.

$$\begin{aligned} F_A(r) &= \int_0^{2\pi} \int_0^z \frac{1}{2\sigma^2\pi} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} r dr d\theta \\ &= \int_0^z \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr \end{aligned}$$

Sannsynlighetstetthetsfunksjonen for amplituden er dermed gitt som

$$f_A(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad (2.29)$$

gjelder for $r \geq 0$.

Tilsvarende kan det vises at et estimat for bølgehøyden for en ekstremt smalbandet prosess gitt som $H = 2A$ også er Rayleigh-fordelt.

2.4 Bootstrap med konfidensintervall

I denne avhandlingen skal vi utføre eksperiment der vi ser på overflatehevninger med ulik periode. Ut fra disse eksperimentene ønsker vi å si noe signifikant om de statistiske egenskapene havbølger, som har de samme egenskapene som bølgefeltene i laboratoriet, kommer til å ha. For å kunne gjøre dette bruker vi bootstrap-metoden til å beregne konfidensintervall for de statistiske parameterne. Under gjennomgås det hva et konfidensintervall er og hvilken metode vi bruker for å beregne konfidensintervall i denne avhandlingen.

I det følgende vil en populasjon betegne alle forekomster, eller tilfeller av det vi ønsker å utføre statistikk på, mens et utvalg betegner en andel av en større populasjon.

2.4.1 Konfidensintervall

Et punktestimat beregnet fra et utvalg av en populasjon gir ingen informasjon om nøyaktigheten og påliteligheten til estimatet for hele populasjonen (Devore & Berk, 2007). I denne avhandlingen kommer vi kun til å se på en relisasjon for hver peak periode vi ønsker bølgefeltene skal har. Derfor vil ikke resultatene vi får for punktestimatene av varians, skjevhet og kurtose kunne si noe signifikant om disse verdiene til havtilstanden. Som et alternativ til et punktestimat for en parameter kan man beregne et intervall av mulige verdier. Dette kalles et konfidensintervall.

Et konfidensintervall er alltid beregnet ved å først velge et konfidensnivå. Konfidensnivået sier noe om påliteligheten til intervallet. De vanligste konfidensnivåene er 95%, 90% og 99%. Dersom man velger å bruke et konfidensnivå på 95% betyr dette at 95% av alle estimat av en parameter vil ligge innenfor dette intervallet. Jo høyere vi velger konfidensnivået til å være, jo større tro har vi til at parameteren som estimeres vil ligge innenfor intervallet. I denne avhandlingen er alle konfidensintervall 95%.

Dersom man har et begrenset antall observasjoner av populasjonen er det vanskelig å si noe signifikant om konfidensintervallet. Man har rett og slett ikke nok informasjon til dette. I slike situasjoner kan bootstrap-metoden brukes.

2.4.2 Bootstrap-metoden

La oss si vi antar at vi har observert et utvalg fra en populasjon x_1, x_2, \dots, x_n . I denne avhandlingen er utvalget gitt som tidsseriene for overflatehevningen. Vi ønsker deretter å finne verdien til en ukjent parameter θ fra datapunktene ved å benytte estimatoren til parameteren, $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x)$. Denne parameteren kan for eksempel være variansen, skjevheten eller kurtosen (Storvik, 2011). Dersom vi ønsker å finne parameteren til hele populasjonen må vi ha informasjon fra hele populasjonen. Dette fører som oftest til at man må prosessere uendelige mengder data, noe som vil ta veldig lang tid. Den beste informasjonen vi har om en gitt populasjon er dermed utvalget vi kjenner. Bootstrap-metoden går ut på at man antar at dette utvalget er den totale populasjonen. Vi trekker datapunkter med tilbakelegg fra utvalget vi kjenner, og antar at dette gir oss en tilsvarende fordeling som vi hadde fått for gjentatt sampling fra hele populasjonen (Devore & Berk, 2007).

Når man gjør bootstrapping trekker man dermed ut deler av utvalget med en eller flere gitte størrelser med tilbakelegging et gitt antall ganger. Deretter beregner man en estimert parameter av de ulike utvalgene. Resultatene av disse parametrene sier oss noe om parameteren til den totale populasjonen. Dersom man sorterer parameterne i stigende rekkefølge kan man lage konfidensintervall til parameteren. At verdien for parameteren ligger innenfor konfidensintervallet man har funnet, anses som en pålitelig antakelse for parameteren, og man kan dermed si noe signifikant om parameteren. I bootstrapberegningene utført i denne avhandlingen er det brukt 95% konfidensintervall.

2.5 Overskridelsessannsynlighet

En annen metode enn beregning av skjevhet og kurtose for å undersøke om det er freake bølger i en tidsserie er å sammenligne bølgehøyde eller amplitude til et bølgefelt med teori. Til dette brukes ofte overskridelsessannsynlighet. Overskridelsessannsynligheten er gitt som $1 - F$, der F er den kumulative fordelingsfunksjonen (se ligning (2.8)). Med andre ord vil overskridelsessannsynligheten være sannsynligheten for at prosessen vi ser på ligger over en gitt terskelverdi.

Da man antar at havbølger er Gaussisk fordelt medfører dette at amplituden A til en smalbåndet havoverflate er Rayleigh-fordelt (se ligning 2.29). Tilsvarende kan det vises at estimatet for bølgehøyden til en smalbåndet sjø, $H = 2A$, også er Rayleigh-fordelt. Sannsynlighetstetthetsfunksjonen for bølgehøyde er gitt som

$$f_H(r) = \frac{r}{4\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{8\sigma^2}} \quad (2.30)$$

Denne gjelder for $r \geq 0$. Overskridelsessannsynligheten for bølgehøyden til en smalbåndet prosess blir dermed sannsynligheten for at bølgehøyden er større enn $2A$.

For en smalbåndet prosess angis envelopen som to symmetriske kurver som tangerer kammene og bukene til et bølgefelt. Envelopen kan dermed beskrive de statistiske egenskapene til kammene og bukene på samme måte som amplituden. Fordelingsfunksjonen for envelopen er den samme som for amplituden (Ochi, 1998). Ochi (1998) viser at envelopen $E(t)$ kan beskrives ved en Hilbert-transform $\tilde{\eta}(t)$ av overflatehevningen $\eta(t)$ på følgende måte:

$$E(t) = \sqrt{\{\eta(t)\}^2 + \{\tilde{\eta}(t)\}^2} \quad (2.31)$$

En Hilbert-transform $\tilde{\eta}(t)$ er definert som (Ochi (1998)):

$$\tilde{\eta}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (2.32)$$

Dersom man benytter Matlab-funksjonen `hilbert`, gir den en sum av i gange hilbert-transformen og den reelle overflatehevningen: `hilbert`($\eta(t)$) = $\eta(t) + i\tilde{\eta}(t)$. Dermed gir absoluttverdien av denne funksjonen envelopen, mens bølgehøyden blir to ganger denne absoluttverdien. For overskridelsessannsynlighetene beregnet i denne avhandlingen benytter vi nettopp estimatet for bølgehøyden som to ganger absoluttverdien til Hilbert-funksjonen i Matlab.

2.6 Bevaring av energiflukstetthet og Greens lov

For å kunne si noe om hvordan vi forventer at amplituden til et bølgefelt forandrer seg i forhold til dypet når bølgene beveger seg fra dypere til grunnere vann, kan vi benytte bevaring av energiflukstetthet. Ut fra dette kan vi utlede Greens lov for bølger på veldig grunt vann. I introduksjonen nevnes det at Greens lov sier at dersom langkammede bølger kommer rett inn på dybdekurvene vil amplituden øke litt omvendt proporsjonal med fjerderoten av dybden (Lamb, 1932, Art.185).

Vi starter med ligningen for energiflukstettheten til bølger i stasjonær tilstand. Denne finner vi som ligning (2.46) i Gjevik *et al.* (2010).

$$\mathbf{F} = E\mathbf{c}_g$$

der E er energien til overflatetyngdebølger gitt ved

$$E = \frac{1}{2}\rho g a^2$$

der ρ er tettheten til fluidet vi ser på, g er gravitasjonsakselerasjonen og a er amplituden til bølgene.

Slår man de to ligningene ovenfor sammen får man

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2}\mathbf{c}_g\rho g a^2.$$

Gauss' sats sier at fluksen inn gjennom en lukket begrensingsflate er det samme som fluksen ut av den samme flaten (Gjevik, 2009). Dersom vi ser på en lukket begrensingsflate fra posisjon 1 til 2 i for eksempel bølgetanken eksperimentene i denne avhandlingen skal utføres i, betyr dette følgende

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2$$

Da det er samme tetthet i fluidet i bølgetanken gir dette følgende resultat

$$c_{g1}a_1^2 = c_{g2}a_2^2 \quad (2.33)$$

Vi går her bort fra vektornotasjon på grunn av at bølgetanken er todimensjonal og gruppehastigheten vil forplante seg i samme retning over hele tanken.

I grensen av veldig grunt vann har vi dispersjonsrelasjonen $\omega_c = k_c \sqrt{gh}$. Dette gir følgende gruppehastighet

$$c_g = \frac{\partial \omega_c}{\partial k_c} = \sqrt{gh}$$

Innsetter vi dette i ligning (2.33) får vi at amplituden a_2 forandrer seg som $(h_1/h_2)^{-1/4}$.

$$a_2 = a_1 \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^{1/4} \quad (2.34)$$

Dette gjenkjenner vi som Greens lov (Lamb, 1932, Art.185). Dersom bølgene forplanter seg inn på grunnere vann ($h_2 < h_1$) ser vi her at amplituden til bølgene vil øke litt.

2.7 JONSWAP-spekter

Formuleringen av JONSWAP-spekteret er basert på omfattende bølgemålinger i Nordsjøen gjennom prosjektet Joint North Sea Wave Project fra 1968–1969 (Hasselmann *et al.*, 1973). Spekteret er i følge Krogstad & Arntsen (2000) gitt som

$$S(f) = S_{PM}(f) \gamma^{\exp(-(f-f_p)^2/(2\sigma^2 f_p^2))} \quad (2.35)$$

der γ kalles «peak enhancement» faktor og representerer forholdet mellom maksimum spektral energitetthet til JONSWAP-spekteret med maksimum til det korresponderende Pierson–Moskowitz spekteret (Ochi, 1998), og S_{PM} er det korresponderende Pierson–Moskowitz spekteret.

Pierson–Moskowitz spekteret er gitt som

$$S_{PM}(f) = \frac{A}{f^5} e^{(B^2/f^4)} \quad (2.36)$$

I Krogstad & Arntsen (2000) nevnes det at A og B i det originale arbeidet til Pierson og Moskowitz var relatert til vindhastigheten 19,5 m over middels havnivå, men at det i dag er parametere relatert til den generelle havtilstanden. De settes for eksempel til

$$A = \frac{5}{16} H_{m0}^2 f_p^4 \quad (2.37)$$

$$B = \frac{5}{4} f_p^4 \quad (2.38)$$

der $H_{m0} = 4\sqrt{m_0}$ med m_0 som det nullte moment (2.16) og f_p er peak frekvens.

JONSWAP-spekteret med $\gamma = 3,3$ er ikke smalbåndet. Men vi valgte likevel å bruke dette spekteret i forsøkene tilknyttet denne avhandlingen. Dette var med bakgrunn i at vi ønsket å gjøre eksperiment på et bølgefelt som kunne si noe signifikant om bølgene på havet. Alber (1978) konkluderer ut fra resultater fra to JONSWAP-spektre med båndbredde 0,075 og 0,082 at et typisk JONSWAP-spekter ligger utenfor modulasjonsustabilitet. Dermed vil en eventuell utvikling av freake bølger i eksperimentene tilknyttet denne avhandlingen ikke komme av modulasjonsustabilitet.

Kapittel 3

Analytiske metoder

En konsekvens av de tidsrammene som er satt av til denne avhandlingen er at det ikke er tid til å gjøre fulle numeriske beregninger som kan sammenlignes med resultatene fra eksperimentene. I tillegg er det stor sannsynlighet for at noen av tilfellene det er kjørt eksperimenter for, befinner seg på et dyp der det enda ikke finnes en god analytisk modell, med unntak av full løsning av Euler-ligningene. Av disse grunnene går vi i det følgende gjennom noen enklere analytiske løsninger som kan gi oss litt informasjon om bølgefeltene vi jobber med i eksperimentene. Vi går først gjennom en analyse for å finne reflekterte og transmitterte bølger i et bølgefelt som propagerer over et step med samme dimensjon som skal brukes i eksperimentene. Hovedforskjellen mellom denne analysen og eksperimentene er at disse løsningene gjelder kun for ekstremt grunt vann. Deretter gjennomgås en perturbasjonsutvikling for langsomt modulerte bølger til andre orden på vilkårlig dyp. Denne brukes videre til beregning av en analytisk løsning for de statistiske parameterne skjevhet og kurtose til andre orden.

3.1 Refleksjon av bølger over et step

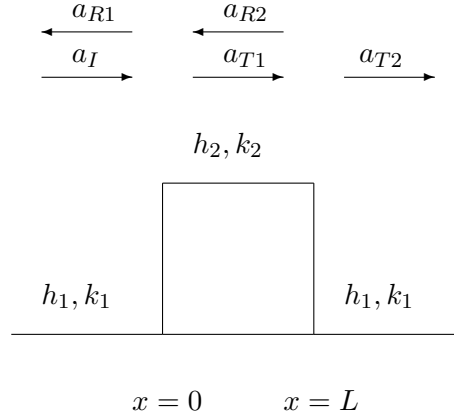
Dette delkapittelet tar for seg irregulære langkammede bølger på grunt vann som propagerer over en ikke-uniform bunn. Motivert av arbeidet til Zeng (2012) er vi interessert i å se på refleksjon og transmisjon av en innkommende bølge for to ulike tilfeller. Vi ser først på et kvadratisk step og videreutvikler deretter løsningen til et skrånende step. Målet med dette arbeidet er å bruke kjent teori til å få en følelse av hvor mye av bølgefeltet i laboratoriet vi kan forvente reflektert av det skrånende steppet.

3.1.1 Refleksjon over et kvadratisk step

En bunnprofil er gitt som

$$h = \begin{cases} h_1 & x < 0 \\ h_2 & 0 < x < L \\ h_1 & x > L \end{cases} \quad (3.1)$$

Innkommende bølger kommer inn mot steppet fra venstre. Ved hver forandring av bunnen kan man løse et transmisjons-/refleksjonsproblem med bakgrunn i antakelsen om at bøl-



Figur 3.1: Ikke-uniform bunn, kvadratisk step

gene kan beskrives som en lineær superposisjon av monokromatiske bølger (Zeng, 2012). Ved å pålegge krav om kontinuerlig overflatehevning og kontinuerlig volumfluks ved hver forandring, i dette tilfellet ved $x = 0$ og $x = L$, kan vi finne de ulike refleksjons- og transmisjonskoeffisientene for bølgebevegelsen.

Den innkommende bølgen har følgende form:

$$\eta_I = \frac{1}{2}a_I e^{i(k_1 x - \omega t)} + c.c. \quad (3.2)$$

der $c.c.$ angir den komplekskonjugerte.

Videre antar vi form på de fire gjenværende bølgene:

$$\eta_{R1} = \frac{1}{2}a_{R1} e^{i(-k_1 x - \omega t)} + c.c. \quad (3.3)$$

$$\eta_{T1} = \frac{1}{2}a_{T1} e^{i(k_2 x - \omega t)} + c.c. \quad (3.4)$$

$$\eta_{R2} = \frac{1}{2}a_{R2} e^{i(-k_2 x - \omega t)} + c.c. \quad (3.5)$$

$$\eta_{T2} = \frac{1}{2}a_{T2} e^{i(k_1 x - \omega t)} + c.c. \quad (3.6)$$

Fra den tredje stråleligningen (3.7) har vi at siden steppet ikke endrer seg eller flytter seg i tid, vil angulærfrekvensen ω heller ikke endre seg i tid. Den er dermed konstant i fluidet over steppet.

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} \quad (3.7)$$

I de følgende utregningen ser jeg ikke på de komplekskonjugerte leddene da alle kryssledd vil bli null på grunn av ortogonalitet.

Kravet om kontinuerlig overflatehevning vil gi følgende ligninger:

- Ved $x = 0$:

$$\eta_I + \eta_{R1} = \eta_{T1} + \eta_{R2}$$

Innsetter ligningene (3.2)–(3.5). Siden vi har konstant angulærfrekvens i fluidet, samt at kravet skal gjelde for alle tider, kan vi stryke alle eksponentialledd.

$$a_I + a_{R1} = a_{T1} + a_{R2} \quad (3.8)$$

- Ved $x = L$:

$$\eta_{T1} + \eta_{R2} = \eta_{T2}$$

Innsetter ligningene (3.4), (3.5) og (3.6).

$$a_{T1}e^{ik_2L} + a_{R2}e^{-ik_2L} = a_{T2}e^{ik_1L} \quad (3.9)$$

Volumfluks er ved endelig dyp gitt ved

$$U = \int_{-H}^{\eta} u \, dz \quad (3.10)$$

Med bakgrunn i at vi nå ser på grunt vann, kan vi anta at akselerasjonen i z-retning er mye mindre enn i x-retning. Dette medfører at hastigheten i x-retning kan antas å være uavhengig av z. Når vi da ser på det lineariserte tilfellet får vi fra ligning (3.10) at:

$$U = Hu$$

Den lineariserte momentumligningen i horisontal x-retning er gitt som:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (3.11)$$

Dersom vi innsetter $u = \frac{U}{H}$ i ligning (3.11) ender vi opp med

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -c_0^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (3.12)$$

der $c_0^2 = gH$.

Ligning (3.12) løses for U for de fem overflatehevningene (3.2)–(3.6):

$$U_I = \frac{1}{2}a_I\sqrt{gh_1}e^{i(k_1x-\omega t)} + c.c. \quad (3.13)$$

$$U_{R1} = -\frac{1}{2}a_{R1}\sqrt{gh_1}e^{i(-k_1x-\omega t)} + c.c. \quad (3.14)$$

$$U_{T1} = \frac{1}{2}a_{T1}\sqrt{gh_2}e^{i(k_2x-\omega t)} + c.c. \quad (3.15)$$

$$U_{R2} = -\frac{1}{2}a_{R2}\sqrt{gh_2}e^{i(-k_2x-\omega t)} + c.c. \quad (3.16)$$

$$U_{T2} = \frac{1}{2}a_{T2}\sqrt{gh_1}e^{i(k_1x-\omega t)} + c.c. \quad (3.17)$$

Kravet om kontinuerlig volumfluks gir dermed følgende ligninger:

- Ved $x = 0$:

$$U_I + U_{R1} = U_{T1} + U_{R2}$$

Når man innsetter ligningene for volumfluks, ligning (3.13)–(3.16) gir dette:

$$a_I \sqrt{h_1} - a_{R1} \sqrt{h_1} = a_{T1} \sqrt{h_2} - a_{R2} \sqrt{h_2} \quad (3.18)$$

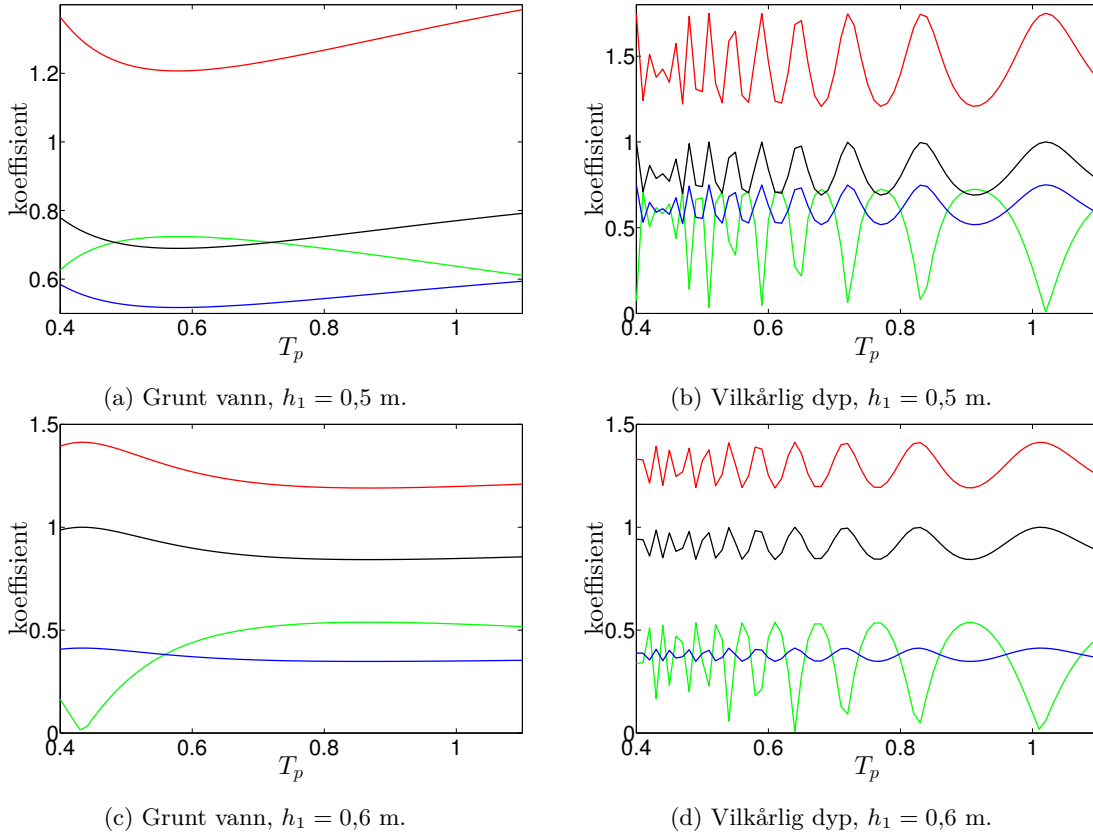
- Ved $x = L$:

$$U_{T1} + U_{R2} = U_{T2}$$

Innsetter ligningene (3.15), (3.16) og (3.17).

$$a_{T1} \sqrt{h_2} e^{ik_2 L} - a_{R2} \sqrt{h_2} e^{-ik_2 L} = a_{T2} \sqrt{h_1} e^{ik_1 L} \quad (3.19)$$

Ligningene (3.8), (3.9), (3.18) og (3.19) angir nå fire ligninger med fire ukjente. Figur 3.2 viser absoluttverdi av a_{T1} (rød), a_{R1} (grønn), a_{R2} (blå) og a_{T2} (svart) funnet med dispersjonsrelasjonen for grunt vann og dispersjonsrelasjonen for vilkårlig dyp. Den innkommende bølgen har en amplitude på $a_I = 1$. Motivert av steppet det skal gjøres eksperiment med i denne avhandlingen er L satt til 1,6 m og dypet er satt til $h_1 = 0,5$ m og $h_1 = 0,6$ m.

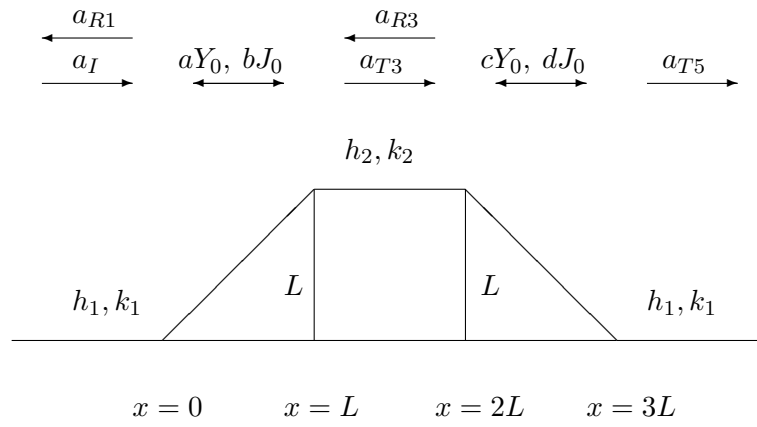


Figur 3.2: Refleksjons- og transmisjonskoeffisienter for kvadratisk step.

3.1.2 Refleksjon over et skrånende step

En bunnprofil er gitt som

$$h = \begin{cases} h_1 & x < 0 \\ h_1 - \frac{x}{L} (h_1 - h_2) & 0 < x < L \\ h_2 & L < x < 2L \\ h_1 + \frac{x}{L} (h_1 - h_2) - 3(h_1 - h_2) & 2L < x < 3L \\ h_1 & x > 3L \end{cases} \quad (3.20)$$



Figur 3.3: Ikke-uniform bunn, skrånende step

Innkommende bølger kommer inn mot steppet fra venstre. Ved hver forandring av bunnen kan man løse et transmisjons-/refleksjonsproblem ved samme antakelse som for det kvadratiske steppet. Ved $x = 0$, $x = L$, $x = 2L$ og $x = 3L$ er det krav om kontinuerlig overflatehevning og kontinuerlig volumfluks. Den innkommende bølgen har samme form som for det kvadratiske steppet:

$$\eta_I = \frac{1}{2} a_I e^{i(k_1 x - \omega t)} + c.c. \quad (3.21)$$

På de skrånende delene av steppet må vi bruke lineær gruntvannsteori for å finne overflatehevningen. Vi søker løsninger av ligningen for lineære bølger på grunt vann, gitt ved

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(c_0^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad (3.22)$$

der $c_0^2 = \sqrt{gh(x)}$. Løsningene vi søker har følgende form:

$$\eta = \hat{\eta} e^{-i\omega t} + c.c. \quad (3.23)$$

Innsetter denne i ligning (3.22) og får:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h(x) \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial x} \right) + \frac{\omega^2}{g} \hat{\eta} = 0 \quad (3.24)$$

Ønsker nå å finne en løsning for $\hat{\eta}$. Innsetter $h(x)$ for den første skråningen fra (3.20) i ligning (3.24):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(h_1 - \frac{x}{L} (h_1 - h_2) \right) \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial x} \right\} + \frac{\omega^2}{g} \hat{\eta} = 0 \quad (3.25)$$

Bruker følgende koordinatskifte:

$$y_1 = \frac{2\omega L}{\sqrt{g} (h_1 - h_2)} \sqrt{h_1 - \frac{x}{L} (h_1 - h_2)} \quad (3.26)$$

Som gir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial y_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y_1} \\ &= \frac{2\omega L}{\sqrt{g} (h_1 - h_2)} \frac{1}{2\sqrt{h_1 - \frac{x}{L} (h_1 - h_2)}} \left(-\frac{h_1 - h_2}{L} \right) \frac{\partial}{\partial y_1} \\ &= -\frac{\omega}{\sqrt{g} (h_1 - \frac{x}{L} (h_1 - h_2))} \frac{\partial}{\partial y_1} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Innsetter dette i ligning (3.25).

$$-\frac{\omega}{\sqrt{g} (h_1 - \frac{x}{L} (h_1 - h_2))} \frac{\partial}{\partial y_1} \left\{ \left(h_1 - \frac{x}{L} (h_1 - h_2) \right) \left(-\frac{\omega}{\sqrt{g} (h_1 - \frac{x}{L} (h_1 - h_2))} \right) \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial y_1} \right\} + \frac{\omega^2}{g} \hat{\eta} = 0 \quad (3.28)$$

Forenkler.

$$-\frac{\sqrt{g}}{\omega \sqrt{h_1 - \frac{x}{L} (h_1 - h_2)}} \frac{\partial}{\partial y_1} \left\{ \left(-\frac{\omega \sqrt{h_1 - \frac{x}{L} (h_1 - h_2)}}{\sqrt{g}} \right) \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial y_1} \right\} + \hat{\eta} = 0$$

Innsetter ligning (3.26).

$$\frac{2L}{(h_1 - h_2) y_1} \frac{\partial}{\partial y_1} \left\{ \frac{(h_1 - h_2) y_1}{2L} \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial y_1} \right\} + \hat{\eta} = 0$$

Deriverer og forenkler.

$$\frac{2L}{y_1 (h_1 - h_2)} \left\{ \frac{(h_1 - h_2)}{2L} \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial y_1} + \frac{y_1 (h_1 - h_2)}{2L} \frac{\partial^2 \hat{\eta}}{\partial y_1^2} \right\} + \hat{\eta} = 0$$

Ender da opp med:

$$\frac{1}{y_1} \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial y_1} + \frac{\partial^2 \hat{\eta}}{\partial y_1^2} + \hat{\eta} = 0 \quad (3.29)$$

Løsningen av differensialligningen (3.29) gjenkjennes som Bessel-funksjonen og Neumann-funksjonen av grad 0:

$$\hat{\eta} = aJ_0(y_1) + bY_0(y_1) \quad (3.30)$$

Tilsvarende beregner vi overflatehevingen over den andre skråningen. Innsetter $h(x)$ fra (3.20) i ligning (3.24). Bruker så følgende koordinatskifte:

$$y_2 = \frac{2\omega L}{\sqrt{g}(h_1 - h_2)} \sqrt{h_1 + \frac{x}{L}(h_1 - h_2) - 3(h_1 - h_2)} \quad (3.31)$$

Ved samme framgangsmåte som over finner vi løsningen av $\hat{\eta}$ for den andre skråningen:

$$\hat{\eta} = aJ_0(y_2) + bY_0(y_2) \quad (3.32)$$

Ligningen for bølgebevegelsen over de skrånende delene av steppet blir dermed som følger:

$$\eta_2 = (aJ_0(y_1) + bY_0(y_1)) e^{-i\omega t} + c.c. \quad (3.33)$$

$$\eta_4 = (cJ_0(y_2) + dY_0(y_2)) e^{-i\omega t} + c.c. \quad (3.34)$$

der $c.c.$ angir den komplekskonjugerte.

Antar form på de gjenværende bølgene:

$$\eta_{R1} = \frac{1}{2} a_{R1} e^{i(-k_1 x - \omega t)} + c.c. \quad (3.35)$$

$$\eta_{T3} = \frac{1}{2} a_{T3} e^{i(k_2 x - \omega t)} + c.c. \quad (3.36)$$

$$\eta_{R3} = \frac{1}{2} a_{R3} e^{i(-k_2 x - \omega t)} + c.c. \quad (3.37)$$

$$\eta_{T5} = \frac{1}{2} a_{T5} e^{i(k_1 x - \omega t)} + c.c. \quad (3.38)$$

Som for det kvadratiske steppet ser jeg ikke på de komplekskonjugerte leddene i de følgende utregningene da alle kryssledd vil bli null på grunn av ortogonalitet. I tillegg har vi konstant ω på grunn av 3.stråleligning (3.7), som også er tilsvarende det kvadratiske steppet.

Kravet om kontinuerlig overflateheving vil gi følgende ligninger:

- Ved $x = 0$:

$$\eta_I + \eta_{R1} = \eta_2$$

Innsetter ligning (3.21), (3.35) og (3.33) og får:

$$\frac{1}{2} a_I + \frac{1}{2} a_{R1} = aJ_0 \left(\frac{2\omega L \sqrt{h_1}}{\sqrt{g}(h_1 - h_2)} \right) + bY_0 \left(\frac{2\omega L \sqrt{h_1}}{\sqrt{g}(h_1 - h_2)} \right) \quad (3.39)$$

- Ved $x = L$:

$$\eta_2 = \eta_{T3} + \eta_{R3}$$

Innsetter ligning (3.33), (3.36) og (3.37) og får:

$$aJ_0 \left(\frac{2\omega L \sqrt{h_2}}{\sqrt{g}(h_1 - h_2)} \right) + bY_0 \left(\frac{2\omega L \sqrt{h_2}}{\sqrt{g}(h_1 - h_2)} \right) = \frac{1}{2} a_{T3} e^{ik_2 L} + \frac{1}{2} a_{R3} e^{-ik_2 L} \quad (3.40)$$

- Ved $x = 2L$:

$$\eta_{T3} + \eta_{R3} = \eta_4$$

Innsetter ligning (3.36), (3.37) og (3.34) og får:

$$\frac{1}{2}a_{T3}e^{ik_2 2L} + \frac{1}{2}a_{R3}e^{-ik_2 2L} = cJ_0 \left(\frac{2\omega L \sqrt{h_2}}{\sqrt{g}(h_1 - h_2)} \right) + dY_0 \left(\frac{2\omega L \sqrt{h_2}}{\sqrt{g}(h_1 - h_2)} \right) \quad (3.41)$$

- Ved $x = 3L$:

$$\eta_4 = \eta_{T5}$$

Innsetter ligning (3.34) og (3.38) og får:

$$cJ_0 \left(\frac{2\omega L \sqrt{h_1}}{\sqrt{g}(h_1 - h_2)} \right) + dY_0 \left(\frac{2\omega L \sqrt{h_1}}{\sqrt{g}(h_1 - h_2)} \right) = \frac{1}{2}a_{T5}e^{ik_2 3L} \quad (3.42)$$

Som for det kvadratiske steppet bruker vi ligning (3.12) og finner fluksen for overflatehevingene (3.21) og (3.33)–(3.38)

$$U_I = \frac{1}{2}a_I \sqrt{gh_1} e^{i(k_1 x - \omega t)} \quad (3.43)$$

$$U_{R1} = -\frac{1}{2}a_{R1} \sqrt{gh_1} e^{i(-k_1 x - \omega t)} \quad (3.44)$$

$$U_2 = -i \sqrt{g \left(h_1 - \frac{x}{L} (h_1 - h_2) \right)} (aJ_1(y_1) + bY_1(y_1)) e^{-i\omega t} \quad (3.45)$$

$$U_{T3} = \frac{1}{2}a_{T3} \sqrt{gh_2} e^{i(k_2 x - \omega t)} \quad (3.46)$$

$$U_{R3} = -\frac{1}{2}a_{R3} \sqrt{gh_2} e^{i(-k_2 x - \omega t)} \quad (3.47)$$

$$U_4 = i \sqrt{g \left(h_1 + \frac{x}{L} (h_1 - h_2) - 3(h_1 - h_2) \right)} (cJ_1(y_2) + dY_1(y_2)) e^{-i\omega t} \quad (3.48)$$

$$U_{T5} = \frac{1}{2}a_{T5} \sqrt{gh_1} e^{i(k_1 x - \omega t)} \quad (3.49)$$

Kravet om kontinuerlig volumfluks vil gi følgende ligninger:

- Ved $x = 0$:

$$U_I + U_{R1} = U_2$$

Innsetter ligningene for volumfluks, ligning (3.43), (3.44) og (3.45)

$$\frac{1}{2}a_I - \frac{1}{2}a_{R1} = -i \left(aJ_1 \left(\frac{2\omega L \sqrt{h_1}}{\sqrt{g}(h_1 - h_2)} \right) + bY_1 \left(\frac{2\omega L \sqrt{h_1}}{\sqrt{g}(h_1 - h_2)} \right) \right) \quad (3.50)$$

- Ved $x = L$:

$$U_2 = U_{T3} + U_{R3}$$

Innsetter ligningene (3.45), (3.46) og (3.47)

$$-i \left(aJ_1 \left(\frac{2\omega L \sqrt{h_2}}{\sqrt{g}(h_1 - h_2)} \right) + bY_1 \left(\frac{2\omega L \sqrt{h_2}}{\sqrt{g}(h_1 - h_2)} \right) \right) = \frac{1}{2}a_{T3}e^{ik_2 L} - \frac{1}{2}a_{R3}e^{-ik_2 L} \quad (3.51)$$

- Ved $x = 2L$:

$$U_{T3} + U_{R3} = U_4$$

Innsetter ligningene (3.46), (3.47) og (3.48)

$$\frac{1}{2}a_{T3}e^{ik_22L} - \frac{1}{2}a_{R3}e^{-ik_22L} = i \left(cJ_1 \left(\frac{2\omega L\sqrt{h_2}}{\sqrt{g}(h_1 - h_2)} \right) + dY_1 \left(\frac{2\omega L\sqrt{h_2}}{\sqrt{g}(h_1 - h_2)} \right) \right) \quad (3.52)$$

- Ved $x = 3L$:

$$U_4 = U_{T5}$$

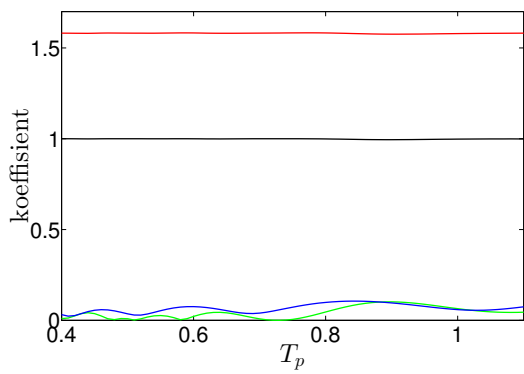
Innsetter ligningene (3.43), (3.44) og (3.45)

$$i \left(cJ_1 \left(\frac{2\omega L\sqrt{h_1}}{\sqrt{g}(h_1 - h_2)} \right) + dY_1 \left(\frac{2\omega L\sqrt{h_1}}{\sqrt{g}(h_1 - h_2)} \right) \right) = \frac{1}{2}a_{T3}e^{ik_23L} \quad (3.53)$$

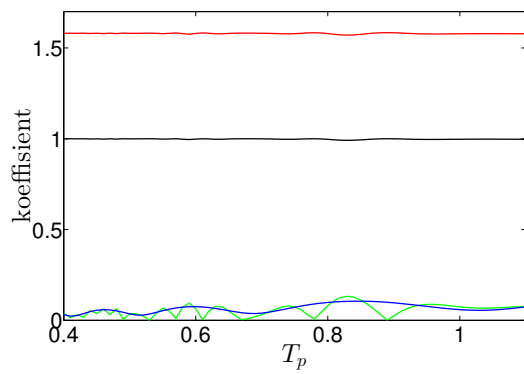
Ligningene (3.39)–(3.42) og (3.50)–(3.53) angir åtte ligninger med åtte ukjente. Figur 3.4 viser absoluttverdi av a_{T3} (rød), a_{T5} (svart), a_{R1} (grønn) og a_{R3} (blå) funnet med dispersjonsrelasjonen for grunt vann og dispersjonsrelasjonen for vilkårlig dyp. Den innkommende bølgen har en amplitude på $a_I = 1$. Motivert av steppet det skal gjøres eksperiment med i denne avhandlingen er L satt til 1,6 m og dypet er satt til $h_1 = 0,5$ m og $h_1 = 0,6$ m.

I utledningen av refleksjons- og transmisjonskoeffisientene for det kvadratiske og det skrånende steppet har vi brukt gruntvannsteori. Ved å beregne koeffisientene for vilkårlig dyp, slik figurene 3.2b og 3.2d og figurene 3.4b og 3.4d viser, trekker vi gruntvannsteori inn på vilkårlig dyp. Dette er problematisk og kan ikke direkte relateres til virkeligheten, men da de ovenstående utregningene blir veldig mye mer komplisert på vilkårlig dyp velger vi å gjøre det på denne måten slik at vi kan få et bilde av hva vi eventuelt kan forvente i eksperimentene.

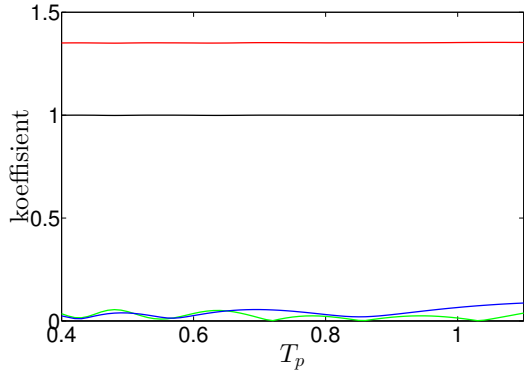
Disse resultatene er, som nevnt, for ekstremt grunt vann. Når man beveger seg inn på dypere vann antar vi at refleksjonskoeffisientene blir mindre og omtrent neglisjerbare. Dermed antar vi videre at vi ikke trenger å ta høyde for at vi har et kryssende bølgefelt i forkant av steppet i eksperimentene tilknyttet denne avhandlingen.



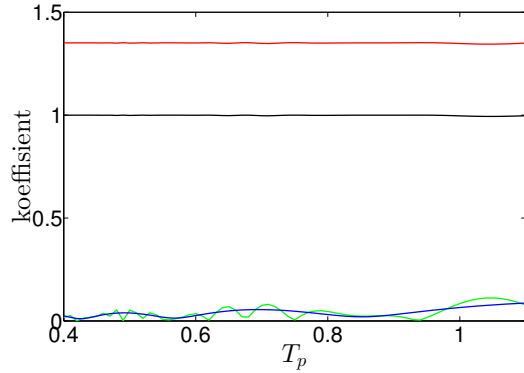
(a) Grunt vann, $h_1 = 0,5$ m.



(b) Vilkårlig dyp, $h_1 = 0,5$ m.



(c) Grunt vann, $h_1 = 0,6$ m.



(d) Vilkårlig dyp, $h_1 = 0,6$ m.

Figur 3.4: Refleksjons- og transmisjonskoeffisienter for skrånende step.

3.2 Langsamt modulerte ikke-lineære bølger på endelige dyp til andre orden

For å kunne sammenligne resultatene for skjevheten og kurtosen fra de eksperimentelle dataene med en analytisk løsning, utfører vi i det følgende en pertubasjonsutvikling for å finne overflatehevning til andre orden for langsamt modulerte ikke-lineære bølger på endelig dyp. Dette resultatet bruker vi videre til å finne andre ordens analytisk løsning for skjevhet og kurtose.

Utgangspunkt er Eulerligningene for inkompressibelt og virvelfritt fluid på endelig dyp.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{ved } z = \eta \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 = 0 \quad \text{ved } z = \eta \quad (3.55)$$

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{for } -h < z < \eta \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{ved } z = \eta \quad (3.57)$$

Bruker karakteristisk steilhet som ordningsparameter og tenker at bølgefeltet er satt sammen av flere bidrag til flere ordener.

$$\phi = \epsilon \phi_1 + \epsilon^2 \phi_2 + \epsilon^3 \phi_3 + \dots \quad (3.58)$$

$$\eta = \epsilon \eta_1 + \epsilon^2 \eta_2 + \epsilon^3 \eta_3 + \dots \quad (3.59)$$

Antar at overflatehevningen til første og andre orden er gitt som

$$\eta_1 = \frac{1}{2} B_1 e^{i(k_c x - \omega_c t)} + c.c. \quad (3.60)$$

$$\eta_2 = B_{2,0} + \frac{1}{2} \left(B_{2,1} e^{i(k_c x - \omega_c t)} + B_{2,2} e^{2i(k_c x - \omega_c t)} + c.c. \right) \quad (3.61)$$

Benytter følgende skaleringsparametere.

$$\begin{aligned} \eta &= a\eta^* \\ x &= \frac{1}{k_c} x^* \\ z &= \frac{1}{k_c} z^* \\ h &= \frac{1}{k_c} h^* \\ t &= \frac{1}{\omega_c} t^* \\ \phi &= \frac{a\omega_c}{k_c} \phi^* \\ \frac{\partial}{\partial x} &= k_c \frac{\partial}{\partial x^*} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= k_c \frac{\partial}{\partial z^*} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \omega_c \frac{\partial}{\partial t^*} \end{aligned}$$

* betyr dimensjonsløs og a er karakteristisk amplitude for bølgefeltet.

3.2.1 Kinematisk randbetingelse

Skalerer ligning (3.54)

$$a\omega_c \frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} + a^2 \omega_c k_c \frac{\partial \phi^*}{\partial x^*} \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} - a\omega_c \frac{\partial \phi^*}{\partial z^*} = 0 \quad \text{ved } z^* = ak_c \eta^*$$

Setter $\epsilon = ak_c$, deler på ω_c , ganger med k_c samt går tilbake til dimensjonell ligning, men beholder ϵ som formell parameter.

$$\epsilon \frac{\partial \eta}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{ved } z = \epsilon \eta \quad (3.62)$$

3.2.2 Dynamisk randbetingelse

Skalerer ligning (3.55)

$$\frac{a\omega_c^2}{k_c} \frac{\partial \phi^*}{\partial t^*} + g a \eta^* + \frac{1}{2} a^2 \omega_c^2 \left(\left(\frac{\partial \phi^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial z^*} \right)^2 \right) = 0 \quad \text{ved } z^* = ak_c \eta^*$$

Forkorter og går tilbake til dimensjonell ligning, men beholder ϵ som formell parameter.

$$\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} + \epsilon g \eta + \frac{\epsilon^2}{2} \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right) = 0 \quad \text{ved } z = \epsilon \eta \quad (3.63)$$

3.2.3 Laplace ligning

Skalerer ligning (3.56)

$$k_c a \omega_c \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial (x^*)^2} + k_c a \omega_c \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial (z^*)^2} = 0 \quad \text{for } -h^* < z^* < ak_c \eta^*$$

Forkorter og går tilbake til dimensjonell ligning, men beholder ϵ som formell parameter.

$$\epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{for } -h < z < \epsilon \eta \quad (3.64)$$

3.2.4 Kinematisk randbetingelse på bunnen

Skalerer ligning (3.57)

$$k_c \frac{a\omega_c}{k_c} \frac{\partial \phi^*}{\partial z^*} = 0 \quad \text{ved } z^* = -h^*$$

Forkorter og går tilbake til dimensjonell ligning, men beholder ϵ som formell parameter.

$$\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{ved } z = -h \quad (3.65)$$

3.2.5 Rekkeutvikling

Benytter Taylor-rekker og rekkeutvikler (3.62) og (3.63) om $z = 0$.

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{z=\epsilon\eta} &= \left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{z=0} + \epsilon\eta\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial t}\right|_{z=0} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{z=\epsilon\eta} &= \left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{z=0} + \epsilon\eta\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x}\right|_{z=0} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{z=\epsilon\eta} &= \left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{z=0} + \epsilon\eta\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right|_{z=0} + \mathcal{O}(\epsilon^2)\end{aligned}$$

Kinematisk randbetingelse til og med andre orden:

$$\epsilon\frac{\partial\eta}{\partial t} + \epsilon^2\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x} - \epsilon\frac{\partial\phi}{\partial z} - \epsilon^2\eta\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{ved } z = 0 \quad (3.66)$$

Dynamisk randbetingelse til og med andre orden:

$$\epsilon\frac{\partial\phi}{\partial t} + \epsilon^2\eta\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial t} + \epsilon g\eta + \frac{\epsilon^2}{2}\left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right) = 0 \quad \text{ved } z = 0 \quad (3.67)$$

3.2.6 Flerskalaanalyse

For å kunne beskrive et irregulært bølgefelt som har båndbredde ulik 0 (slik jeg ønsker her), må man ta i bruk langsommere skalaer. Dersom vi hadde antatt at modulasjonen til bølgefeltet var av samme skala som bærebølgen, ville bølgefeltet bli ekstremt bredbåndet og vi hadde ikke lenger hatt en karakteristisk frekvens, ω_c i bølgefeltet. Dermed vil vi ta med de langsomme skalaene ved å la amplituden B_1 være en funksjon av de langsomme skalaene t_1 og x_1 . De langsomme skalaene er knyttet til båndbredden, δ (se ligning (2.25)). Jeg gjør en umotivert antakelse om at de langsomme skalaene er knyttet til steilheten ved $\delta = \epsilon$. Bruker dermed følgende flerskalaanalyse:

$$\begin{aligned}x_0 &= x, \quad x_1 = \epsilon x, \quad x_2 = \epsilon^2 x, \dots \\ t_0 &= t, \quad t_1 = \epsilon t, \quad t_2 = \epsilon^2 t, \dots \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial x_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots\end{aligned}$$

Etter at den formelle parameteren i ligningene (3.62)–(3.65) er innført, så vil de to perturbasjonsutviklingene (3.58) og (3.59) ta følgende form:

$$\phi = \phi_1 + \epsilon\phi_2 + \epsilon^2\phi_3 + \dots \quad (3.68)$$

$$\eta = \eta_1 + \epsilon\eta_2 + \epsilon^2\eta_3 + \dots \quad (3.69)$$

3.2.7 Randverdiproblemet til andre orden

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial \eta_1}{\partial t_0} + \epsilon^2 \frac{\partial \eta_2}{\partial t_0} + \epsilon^2 \frac{\partial \eta_1}{\partial t_1} + \epsilon^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_0} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_0} \\ - \epsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \epsilon^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial z} - \epsilon^2 \eta_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} = 0 \end{aligned} \quad \text{ved } z = 0 \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial t_0} + \epsilon^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t_0} + \epsilon^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial t_1} + \epsilon^2 \eta_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z \partial t_0} \\ + \epsilon g \eta_1 + \epsilon^2 g \eta_2 + \frac{\epsilon^2}{2} \left(\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right)^2 \right) = 0 \end{aligned} \quad \text{ved } z = 0 \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_0^2} + \epsilon \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x_0^2} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2} \\ + 2\epsilon^2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_0 \partial x_1} = 0 \end{aligned} \quad \text{for } -h < z < 0 \quad (3.72)$$

$$\epsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial z} + \epsilon^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = 0 \quad \text{ved } z = -h \quad (3.73)$$

3.2.8 Første ordens problem, skalert og rekkeutviklet

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t_0} - \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0 \quad \text{ved } z = 0 \quad (3.74)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t_0} + g \eta_1 = 0 \quad \text{ved } z = 0 \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} = 0 \quad \text{for } -h < z < 0 \quad (3.76)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0 \quad \text{ved } z = -h \quad (3.77)$$

Antar at potensialet og overflatehevingen har følgende form

$$\eta_1 = \eta_{1,1} \quad (3.78)$$

$$\phi_1 = \phi_{1,1} + \phi_{1,0} \quad (3.79)$$

der første indeks representerer orden, og andre indeks representerer harmonisk.

Da $\eta_{1,1}$ og $\phi_{1,1}$ er den frie bølgen, vet vi at bølger på tilstrekkelig grunt vann induserer en strøm. Denne strømmen medfører at nullte harmonisk hastighetspotensial dukker opp til første orden.

Første orden, første harmonisk

Antar en løsning for potensialet til første orden på formen

$$\phi_{1,1} = a_{1,1}(z) e^{i(k_c x_0 - \omega_c t_0)} + c.c. \quad (3.80)$$

Innsetter dette potensialet i Laplace ligning (3.74).

$$\frac{\partial^2 a_{1,1}}{\partial z^2} - k_c^2 a_{1,1} = 0$$

Generell løsning av denne differensialligningen er gitt som

$$a_{1,1}(z) = \alpha_1 \cosh(k_c(z+h)) + \beta_1 \sinh(k_c(z+h))$$

Dersom man benytter bunnkravet (3.77) får man at $\beta_1 = 0$, potensialet blir dermed

$$\phi_{1,1} = \alpha_1 \cosh(k_c(z+h)) e^{i(k_c x_0 - \omega_c t_0)} + c.c.$$

Bruker videre kinematisk randbetingelse (3.74) og overflatehevningen (3.60) og finner α_1 .

$$\alpha_1 = -\frac{i\omega_c B_1}{2k_c \sinh(k_c h)}$$

Potensialet til første orden er dermed gitt som

$$\phi_{1,1} = -\frac{i\omega_c B_1}{2k_c \sinh(k_c h)} \cosh(k_c(z+h)) e^{i(k_c x_0 - \omega_c t_0)} + c.c. \quad (3.81)$$

Innsetter dette i det kinematiske randkravet (3.75) og ender opp med dispersjonsrelasjonen.

$$\omega_c^2 = gk_c \tanh(k_c h) \quad (3.82)$$

Dispersjonsrelasjonen skal være oppfylt for alle bølger i bølgefeltet man ser på .

Første orden, nullte harmonisk

Antar løsning for $\phi_{1,0}$

$$\phi_{1,0} = a_{1,0}(x_1, t_1, z) \quad (3.83)$$

Innsetter dette i Laplace ligning (3.76) og får

$$\frac{\partial^2 a_{1,0}}{\partial z^2} = 0$$

som gir

$$a_{1,0} = c_1 z + c_2$$

hvor c_1 og c_2 er konstanter. Benytter bunnkravet (3.77) og finner at $c_1 = 0$, som betyr at $a_{1,0}$ må være uavhengig av z .

Bruker videre den kinematiske randbetingelsen (3.74).

$$\frac{\partial a_{1,0}}{\partial z} = 0$$

Denne er oppfylt da det allerede er vist at $a_{1,0}$ er uavhengig av z .

Den dynamiske randbetingelsen gir ingen bidrag til første orden nullte harmonisk, og vi ender dermed opp med

$$\phi_{1,0} = a_{1,0}(x_1, t_1) \quad (3.84)$$

3.2.9 Andre ordens problem, skalert og rekkeutviklet

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t_0} - \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = -\frac{\partial \eta_1}{\partial t_1} - \frac{\partial \phi_1}{\partial x_0} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_0} + \eta_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} \quad \text{ved } z = 0 \quad (3.85)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t_0} + g\eta_2 = -\frac{\partial \phi_1}{\partial t_1} - \eta_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z \partial t_0} - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right)^2 \right) \quad \text{ved } z = 0 \quad (3.86)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2} = -2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_0 \partial x_1} \quad \text{for } -h < z < 0 \quad (3.87)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial z} = 0 \quad \text{ved } z = -h \quad (3.88)$$

Dette er et inhomogent system som drives av inhomogenitetene på høyre side av ligningene. Den homogene løsningen av systemet er identisk med løsningen til første orden.

Har overflatehevningen (3.60) og potensialet (3.81) fra første orden. Bruker dette til å finne høyre side i (3.85)–(3.88).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_2}{\partial t_0} - \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = & -\frac{1}{2} \frac{\partial B_1}{\partial t_1} e^{i(k_c x_0 - \omega_c t_0)} \\ & - \frac{i\omega_c k_c B_1^2}{2 \tanh(k_c h)} e^{2i(k_c x_0 - \omega_c t)} + c.c. \end{aligned} \quad \text{ved } z = 0 \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_2}{\partial t_0} + g\eta_2 = & \frac{i\omega_c}{2k_c \tanh(k_c h)} \frac{\partial B_1}{\partial t_1} e^{i(k_c x_0 - \omega_c t_0)} \\ & + \frac{3}{8} \omega_c^2 B_1^2 e^{2i(k_c x_0 - \omega_c t)} \\ & - \frac{\omega_c^2 B_1^2}{8 \tanh^2(k_c h)} e^{2i(k_c x_0 - \omega_c t)} \\ & - \frac{\partial \phi_{1,0}}{\partial t_1} - \frac{\omega_c^2 |B_1|^2}{4 \tanh^2(k_c h)} e^0 + \frac{1}{4} \omega_c^2 |B_1|^2 e^0 + c.c. \end{aligned} \quad \text{ved } z = 0 \quad (3.90)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2} = & -\frac{\omega_c}{\sinh(k_c h)} \cosh(k_c(z+h)) \frac{\partial B_1}{\partial x_1} e^{i(k_c x_0 - \omega_c t)} \\ & + c.c. \end{aligned} \quad \text{for } -h < z < 0 \quad (3.91)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial z} = 0 \quad \text{ved } z = -h \quad (3.92)$$

c.c. betyr her komplekskonjugerte av alle harmoniske bortsett fra 0'te harmonisk.

Antar at potensialet og overflatehevningen har følgende form:

$$\eta_2 = \eta_{2,2} + \eta_{2,1} + \eta_{2,0} \quad (3.93)$$

$$\phi_2 = \phi_{2,2} + \phi_{2,1} + \phi_{2,0} \quad (3.94)$$

Som for første orden representerer den første indeks orden, og andre indeks representerer harmonisk.

Første og andre harmonisk til andre orden er de små ikke-lineære korreksjonene til bølgefeltet, mens nullte harmonisk er en liten korreksjon til $\phi_{1,0}$.

I de følgende utregningene ser jeg bort fra de komplekskonjugerte leddene og jeg ser på hver harmonisk for seg da kryssledd mellom komplekskonjugerte og mellom harmoniske vil bli null på grunn av ortogonalitet.

Andre orden, andre harmonisk

Antar $\phi_{2,2}$ har formen

$$\phi_{2,2} = a_{2,2}(z)e^{2i(k_c x_0 - \omega_c t_0)} + c.c. \quad (3.95)$$

Setter inn i Laplace ligning (3.91) (som ikke har noen andre ordens andre harmonisk inhomogeniteter på høyre side) og bunnkravet (3.92) og får

$$a_{2,2} = \alpha_{2,2} \cosh(2k_c(z+h))$$

Videre har vi fra (3.61)

$$\eta_{2,2} = \frac{1}{2}B_{2,2}e^{2i(k_c x_0 - \omega_c t_0)} + c.c. \quad (3.96)$$

Bruker kinematisk (3.89) og dynamisk randkrav (3.90) med andre harmonisk inhomogeniteter på høyre side, og får to ligninger med to ukjente.

$$\begin{bmatrix} -2k_c \sinh(2k_c h) & -i\omega_c \\ -2i\omega_c \cosh(2k_c h) & \frac{g}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{2,2} \\ B_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{i\omega_c k_c B_1^2}{2 \tanh(k_c h)} \\ \frac{3}{8}\omega_c^2 B_1^2 - \frac{\omega_c^2 B_1^2}{8 \tanh^2(k_c h)} \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

Inverterer matrisen på venstre side og løser for $\alpha_{2,2}$ og $B_{2,2}$.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{2,2} \\ B_{2,2} \end{bmatrix} = \frac{1}{-k_c g \sinh(2k_c h) + 2\omega_c^2 \cosh(2k_c h)} \begin{bmatrix} \frac{g}{2} & i\omega_c \\ 2i\omega_c \cosh(2k_c h) & -2k_c \sinh(2k_c h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{i\omega_c k_c B_1^2}{2 \tanh(k_c h)} \\ \frac{3}{8}\omega_c^2 B_1^2 - \frac{\omega_c^2 B_1^2}{8 \tanh^2(k_c h)} \end{bmatrix}$$

Multipliserer matrisene med hverandre og forenkler.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{2,2} \\ B_{2,2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\omega_c^2 \sinh^2(k_c h)} \begin{bmatrix} -\frac{i\omega_c k_c g B_1^2}{4 \tanh(k_c h)} + \frac{3}{8}i\omega_c^3 B_1^2 - \frac{i\omega_c^3 B_1^2}{8 \tanh^2(k_c h)} \\ \frac{\omega_c^2 k_c B_1^2 \cosh(2k_c h)}{\tanh(k_c h)} - \frac{3}{4}\omega_c^2 k_c B_1^2 \sinh(2k_c h) + \frac{\omega_c^2 k_c B_1^2 \sinh(2k_c h)}{4 \tanh^2(k_c h)} \end{bmatrix}$$

Løser for $\alpha_{2,2}$ og $B_{2,2}$.

$$\alpha_{2,2} = \frac{3}{16} \frac{i\omega_c B_1^2}{\sinh^2(k_c h)} \left(\frac{\tanh^2(k_c h) - 1}{\tanh^2(k_c h)} \right) \quad (3.98)$$

$$B_{2,2} = k_c B_1^2 \left(\frac{3 - \tanh^2(k_c h)}{4 \tanh^3(k_c h)} \right) \quad (3.99)$$

Andre orden, første harmonisk

Antar $\phi_{2,1}$ har formen

$$\phi_{2,1} = a_{2,1}(z)e^{i(k_c x_0 - \omega_c t_0)} + c.c. \quad (3.100)$$

Setter inn i Laplace ligning (3.91) (inhomogent bidrag på høyre side), benytter bunnkravet (3.92) og får

$$a_{2,1}(z) = -\frac{\omega_c z}{k_c \sinh(k_c h)} \sinh(k_c(z+h))(z+h) \frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \alpha_{2,1} \cosh(k_c(z+h))$$

Potensialet er dermed gitt som

$$\begin{aligned} \phi_{2,1}(z) = & \left\{ -\frac{\omega_c z}{k_c \sinh(k_c h)} \sinh(k_c(z+h))(z+h) \frac{\partial B_1}{\partial x_1} \right. \\ & \left. + \alpha_{2,1} \cosh(k_c(z+h)) \right\} e^{i(k_c x_0 - \omega_c t_0)} + c.c. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Videre har vi fra (3.61) at

$$\eta_{2,1} = \frac{1}{2} B_{2,1} e^{i(k_c x_0 - \omega_c t_0)} + c.c. \quad (3.102)$$

Bruker kinematisk (3.89) og dynamisk bunnkrav (3.90) med andre harmonisk inhomogeniteter på høyre side, og får to ligninger med to ukjente.

$$\begin{bmatrix} -k_c \sinh(k_c h) & -\frac{i}{2} \omega_c \\ -i \omega_c \cosh(k_c h) & \frac{g}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{2,1} \\ B_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\omega_c h}{2 \tanh(k_c h)} + \frac{\omega_c}{2 k_c}\right) \frac{\partial B_1}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial B_1}{\partial t_1} \\ -\frac{i \omega_c^2 h}{2 k_c} \frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{i \omega_c}{2 k_c \tanh(k_c h)} \frac{\partial B_1}{\partial t_1} \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

Matrisen til venstre har, ved å benytte dispersjonsrelasjonen (3.82), en egenverdi $\lambda = 0$. Dette medfører at de to ligningene kan reduseres til en. Man ganger øverste rad med $-i \omega_c \cosh(k_c h)$ og nederste rad med $k_c \sinh(k_c h)$. Man ender da opp med

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} i \omega_c k_c \sinh(k_c h) \cosh(k_c h) & -\frac{\omega_c^2}{2} \cosh(k_c h) \\ -i \omega_c k_c \sinh(k_c h) \cosh(k_c h) & \frac{g k_c}{2} \sinh(k_c h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{2,1} \\ B_{2,1} \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} \left(\frac{i \omega_c^2 h \cosh(k_c h)}{2 \tanh(k_c h)} + \frac{i \omega_c^2 \cosh(k_c h)}{2 k_c}\right) \frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{i \omega_c \cosh(k_c h)}{2} \frac{\partial B_1}{\partial t_1} \\ -\frac{i \omega_c^2 h \sinh(k_c h)}{2} \frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{i \omega_c \cosh(k_c h)}{2} \frac{\partial B_1}{\partial t_1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Får da

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\omega_c^2}{2} \cosh(k_c h) + \frac{g k_c}{2} \sinh(k_c h)\right) B_{2,1} = & \left(\frac{i \omega_c^2 h \cosh(k_c h)}{2 \tanh(k_c h)} + \frac{i \omega_c^2 \cosh(k_c h)}{2 k_c} \right. \\ & \left. - \frac{i \omega_c^2 h \sinh(k_c h)}{2}\right) \frac{\partial B_1}{\partial x_1} \\ & + \left(\frac{i \omega_c \cosh(k_c h)}{2} + \frac{i \omega_c \cosh(k_c h)}{2}\right) \frac{\partial B_1}{\partial t_1} \end{aligned}$$

På grunn av at dispersjonrelasjonen (3.82) er oppfylt blir venstre side 0. Dermed får vi et løsbarehetskriterium for høyre side.

$$\left(\frac{i\omega_c^2 h \cosh(k_ch)}{2 \tanh(k_ch)} + \frac{i\omega_c^2 \cosh(k_ch)}{2k_c} - \frac{i\omega_c^2 h \sinh(k_ch)}{2} \right) \frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \left(\frac{i\omega_c \cosh(k_ch)}{2} + \frac{i\omega_c \cosh(k_ch)}{2} \right) \frac{\partial B_1}{\partial t_1} = 0$$

Forenkler.

$$\left(\frac{\omega_c}{2k_c \tanh(k_ch)} \left(k_ch + \tanh(k_ch) - k_ch \tanh^2(k_ch) \right) \right) \frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_1}{\partial t_1} = 0 \quad (3.104)$$

Fra dispersjonsrelasjonen (3.82) finner vi gruppehastigheten for vilkårlig dyp.

$$c_g = \frac{\partial \omega_c}{\partial k_c} = \frac{\omega_c}{2k_c \tanh(k_ch)} \left(k_ch + \tanh(k_ch) - k_ch \tanh^2(k_ch) \right) \quad (3.105)$$

Ligning (3.104) forteller oss dermed at den komplekse envelopen forflytter seg med gruppehastigheten til den karakteristiske bølgen.

Nederste rad i (3.103) gir en relasjon mellom $\alpha_{2,1}$ og $B_{2,1}$.

$$\alpha_{2,1} = \frac{1}{2 \cosh(k_ch)} \left(\frac{g}{i\omega_c} B_{2,1} - \frac{1}{\tanh(k_ch)} \frac{\partial B_1}{\partial t_1} + \omega_c h \frac{\partial B_1}{\partial x_1} \right) \quad (3.106)$$

Jeg velger å legge hele første harmonisk bidrag inn i overflatehevingen til første orden, noe som medfører at jeg setter $B_{2,1} = 0$. Dette for å enklere kunne sammenlikne de ulike ordnene (og harmoniske) med resultatene fra eksperimentet. Konsekvensen av dette vil være at $\alpha_{2,1}$ ikke er på Hamiltonsk form, noe som ikke vil ha noen innvirkning i denne sammenhengen.

Dersom vi uttrykker ligning (3.106) kun ved den tidsderiverte (løser (3.104) for $\frac{\partial B_1}{\partial x_1}$ og innsetter) får vi

$$\alpha_{2,1} = \left(-\frac{1}{2k_c \sinh(k_ch)} - \frac{h \tanh(k_ch)}{\cosh(k_ch) \left(k_ch + \tanh(k_ch) - k_ch \tanh^2(k_ch) \right)} \right) \frac{\partial B_1}{\partial t_1} \quad (3.107)$$

Andre orden, nullte harmonisk

Antar $\phi_{2,0}$ har følgende form

$$\phi_{2,0} = a_{2,0}(x_1, t_1, z) \quad (3.108)$$

Innsetter dette i Laplace ligning (3.91) og får

$$\frac{\partial^2 a_{2,0}}{\partial z^2} = 0$$

som gir

$$a_{2,0} = c_3 z + c_4$$

hvor c_3 og c_4 er konstanter. Benytter bunnkravet (3.92) og finner at $c_3 = 0$ som betyr at $a_{2,0}$ er uavhengig av z .

Bruker videre den kinematiske randbetingelsen (3.89) (ingen nullte harmoniske inhomogeniteter på høyre side).

$$\frac{\partial \eta_{2,0}}{\partial t_0} - \frac{\partial \phi_{2,0}}{\partial z} = 0$$

Siden $\phi_{2,0}$ er uavhengig av z gir dette

$$\eta_{2,0} = B_{2,0}(x_1, t_1)$$

Bruker så den dynamiske randbetingelsen (3.90).

$$\frac{\partial \phi_{2,0}}{\partial t_0} + g\eta_{2,0} = -\frac{\partial \phi_{1,0}}{\partial t_1} - \frac{\omega_c^2 |B_1|^2}{4 \tanh^2(k_ch)} + \frac{1}{4} \omega_c^2 |B_1|^2$$

Siden $\phi_{2,0}$ er uavhengig av t_0 gir dette

$$B_{2,0} = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi_{1,0}}{\partial t_1} + \frac{\omega_c^2 |B_1|^2}{4g} \left(1 - \frac{1}{\tanh^2(k_ch)} \right)$$

Innsetter dispersjonsrelasjonen (3.82).

$$B_{2,0} = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi_{1,0}}{\partial t_1} + \frac{k_c |B_1|^2}{4} \left(\frac{\tanh^2(k_ch) - 1}{\tanh(k_ch)} \right) \quad (3.109)$$

Har her en ligning med to ukjente, $B_{2,0}$ og $\phi_{1,0}$ (fant kun at $\phi_{1,0} = a_{1,0}(x_1, t_1)$ fra første orden). Dette er ikke løsbart. Den andre ligningen vi trenger for å finne $B_{2,0}$, finner vi til tredje orden nullte harmonisk. Da tiden ikke strekker til for å ta denne pertubasjonsutviklingen opp til tredje orden finner vi ligningen vi mangler i Zeng & Trulsen (2012), ligning (9):

$$\frac{\partial \tilde{\phi}_{1,0}}{\partial \tilde{t}_1} = \frac{\tilde{c}_g^2}{4s^2 (\tilde{h} - \tilde{c}_g^2)} \left(1 - s^2 + \frac{2}{\tilde{k}\tilde{c}_g} \right) |\tilde{B}|^2 + f(x) \quad (3.110)$$

der $s = \tanh(\tilde{k}\tilde{h}) = \tanh(k_ch)$ og $\tilde{B} = B_1 + \epsilon B_{2,1}$. I delkapittel 3.2.9 har vi argumentert for at vi kan sette $B_{2,1} = 0$, får dermed $\tilde{B} = B_1$.

Ligning (3.110) er gjort dimensjonsløs ved hjelp av dispersjonsrelasjonen for dypt vann: $\tilde{k}_c = \omega_c^2/g$. Dette gir følgende skaleringsparametere

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= \frac{k_c}{\tilde{k}_c} = \frac{k_c g}{\omega_c^2} \\ \tilde{h} &= \tilde{k}_c h = \frac{\omega_c^2}{g} h \\ \tilde{c}_g &= \frac{\tilde{k}_c}{\omega_c} c_g = \frac{\omega_c}{g} c_g \\ |\tilde{B}|^2 &= \tilde{k}_c^2 |B_1|^2 = \frac{\omega_c^4}{g^2} |B_1|^2 \\ \tilde{\phi}_{1,0} &= \frac{1}{h c_g} \phi_{1,0} \\ \tilde{t} &= \omega_c t \\ \frac{\partial \tilde{\phi}_{1,0}}{\partial \tilde{t}_1} &= \frac{1}{c_g h \omega_c} \frac{\partial \phi_{1,0}}{\partial t_1} \end{aligned}$$

der c_g tilsvareer ligning (3.105).

Skriver om og forenkler ligning (3.110) på dimensjonell form da det er det jeg har benyttet i mine utregninger.

$$\frac{\partial \phi_{1,0}}{\partial t_1} = \frac{c_g^3 \omega_c k_c^2 h}{4g(gh - c_g^2)} \left(1 - \tanh^2(k_c h) + \frac{2\omega_c}{k_c c_g} \right) |B_1|^2 + f(x) \quad (3.111)$$

der c_g tilsvareer ligning (3.105).

Funksjonen $f(x)$ kommer fra en integrasjon av ligning (8) i Zeng & Trulsen (2012). Denne lar vi i vårt tilfelle være 0. Årsaken til dette er at $f(x)$ bare gir bidrag til fasen til bølgene, og denne har ingen innvirkning på disse utregningene (se Djordević & Redekopp (1978))

Kan nå løse ligning (3.109) for $B_{2,0}$.

$$B_{2,0} = |B_1|^2 \left\{ -\frac{c_g^3 \omega_c k_c^2 h}{4g(gh - c_g^2)} \left(1 - \tanh^2(k_c h) + \frac{2\omega_c}{k_c c_g} \right) + \frac{k_c}{4} \left(\frac{\tanh^2(k_c h) - 1}{\tanh(k_c h)} \right) \right\} \quad (3.112)$$

3.2.10 Oppsummering av overflatehevningen til andre orden

Dersom man setter sammen resultatene fra utregningene over får man at overflatehevningen for langsomt varierende bølger på vilkårlig dyp til andre orden har følgende form

$$\begin{aligned} \eta = \frac{|B_1|^2 k_c}{4} & \left[-\frac{c_g^3 \omega_c k_c h}{g(gh - c_g^2)} \left(1 - \tanh^2(k_c h) + \frac{2\omega_c}{k_c c_g} \right) + \left(\frac{\tanh^2(k_c h) - 1}{\tanh(k_c h)} \right) \right] \\ & + \frac{1}{2} \left(B_1 e^{i(k_c x - \omega_c t)} + k_c B_1^2 \left(\frac{3 - \tanh^2(k_c h)}{4 \tanh^3(k_c h)} \right) e^{2i(k_c x - \omega_c t)} + c.c. \right) \end{aligned} \quad (3.113)$$

Denne overflatehevningen er ikke begrenset til langsomt varierende bølger. Dersom vi lar B_1 være konstant i rom gir denne løsningen overflatehevningen for Stokes bølger på vilkårlig dyp. Både Stokes og langsomt modulerte bølger er smalbåndede bølger. Forskjellen er at Stokes bølger er uendelig smalbåndet. De er dermed uendelig langsomt varierende.

3.2.11 Statistisk beskrivelse

Overflatehevningen vi startet med i utregningene over har følgende form $\eta = \frac{1}{2} B e^{i\phi} + c.c.$ (se ligning 3.60). For at utregningene av de statistiske parameterne forventningsverdi, varians, skjevhet og kurtose, i det følgende skal bli enklest mulig, velger vi å skrive denne om på denne formen:

$$\eta = a \cos \phi - b \sin \phi \quad (3.114)$$

hvor a og b er statistisk uavhengige, Gaussisk fordelt med forventning 0 og varians σ^2 og $\phi = k_c x - \omega_c t$. Dette medfører at fordelingsfunksjonene for a og b er gitt som

$$\begin{aligned} f_a(a) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} \\ f_b(b) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

Dersom vi skriver a og b om til polarkoordinater ($a = A \cos \theta$ og $b = A \sin \theta$) får overflatehevnningen (3.114) følgende form

$$\begin{aligned}\eta &= A (\cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \theta) \\ &= A \cos (\phi + \theta) \\ &= \frac{1}{2} A e^{i(\phi+\theta)} + c.c.\end{aligned}\tag{3.115}$$

$$= \frac{1}{2} B e^{i\phi} + c.c.\tag{3.116}$$

Dermed har vi vist at den komplekse amplituden B kan skrives om til $B = A e^{i\theta}$, der A er reell.

Videre er vi ute etter å finne fordelingen til A og θ . Vi ser da på sannsynligheten for at a og b ligger innenfor et domene I :

$$\begin{aligned}P \{(a, b) \in I\} &= \iint_I \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(a^2+b^2)}{2\sigma^2}} da db \\ &= \iint_I \frac{A}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}} dA d\theta \\ &= \iint_I \frac{A}{\sigma^2} e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}} dA \frac{1}{2\pi} d\theta\end{aligned}$$

VI har dermed vist at A er Rayleigh-fordelt og θ er uniformt fordelt over et intervall med lengde 2π . I tillegg viser dette at A og θ er statistisk uavhengige.

Når vi skal finne forventningsverdien, variansen, skjevheten og kurtosen er det to kriterier som må holdes i hver utregning. For det første må resultatene ikke falle utenfor pertubasjonsanalysen. Med andre ord beholder vi ledd av orden som er innenfor det vi har funnet i pertubasjonsanalysen. I tillegg er det kun ledd med $e^{0i\theta}$ som gir bidrag.

Under følger noen forventningsverdier vi vil få bruk for.

$$E \left[e^{ni\theta} \right] = 0 \quad \text{for } n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\tag{3.117}$$

$$E \left[e^{0i\theta} \right] = 1\tag{3.118}$$

$$\begin{aligned}E \left[A^2 \right] &= \int_0^\infty \frac{A^3}{\sigma^2} e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}} dA \\ &= 2\sigma^2\end{aligned}\tag{3.119}$$

Bruker her delvis integrasjon en gang.

$$\begin{aligned}E \left[A^4 \right] &= \int_0^\infty \frac{A^5}{\sigma^2} e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}} dA \\ &= 8\sigma^4\end{aligned}\tag{3.120}$$

Bruker her delvis integrasjon to ganger.

Første orden

Basert på utregningene over skriver jeg om overflatehevningen (3.60).

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{1}{2}B_1 e^{i\phi} + c.c. + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \frac{1}{2}A e^{i(\theta+\phi)} c.c. + \mathcal{O}(\epsilon^2)\end{aligned}\tag{3.121}$$

hvor $B_1 = A e^{i\theta}$, $\phi = k_c x + \omega_c t$, A er Rayleigh-fordelt, θ er uniformt fordelt.

Finner forventningsverdien av (3.121) fra ligning (2.12).

$$\mu = E[\eta] = \frac{1}{2}E[A]E[e^{i\theta}]e^{i\phi} + c.c. + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0 + \mathcal{O}(\epsilon^2)\tag{3.122}$$

Bruker ligning (2.14) og finner variansen til (3.121).

$$\begin{aligned}\sigma^2 = E[\eta^2] &= E\left[\frac{1}{4}A^2 e^{2i(\theta+\phi)} + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{4}A^2 e^{-2i(\theta+\phi)} + \mathcal{O}(\epsilon^3)\right] \\ &= \frac{1}{4}E[A^2]E[e^{2i\theta}]e^{2i\phi} + \frac{1}{2}E[A^2] + \frac{1}{4}E[A^2]E[e^{-2i\theta}]e^{-2i\phi} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ &= \frac{1}{2}E[A^2] + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ &= \sigma^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3)\end{aligned}\tag{3.123}$$

Finner skjevheten fra (2.17).

$$\begin{aligned}E[\eta^3] &= E\left[\frac{1}{8}A^3 e^{3i(\theta+\phi)} + \frac{3}{8}A^3 e^{i(\theta+\phi)} + \frac{3}{8}A^3 e^{-i(\theta+\phi)} + \frac{1}{8}A^3 e^{-3i(\theta+\phi)} + \mathcal{O}(\epsilon^4)\right] \\ &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4)\end{aligned}$$

Skjevheten er dermed gitt som

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{E[\eta^3]}{\sigma^3} + \mathcal{O}(\epsilon) \\ &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon)\end{aligned}\tag{3.124}$$

På tilsvarende måte finner vi kurtosen fra (2.18).

$$\begin{aligned}E[\eta^4] &= E\left[\frac{1}{16}A^4 e^{4i(\theta+\phi)} + \frac{1}{4}A^4 e^{2i(\theta+\phi)} + \frac{3}{8}A^4 + \frac{1}{4}A^4 e^{-2i(\theta+\phi)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{16}A^4 e^{-4i(\theta+\phi)} + \mathcal{O}(\epsilon^5)\right] \\ &= \frac{3}{8}E[A^4] + \mathcal{O}(\epsilon^5) \\ &= 3\sigma^4 + \mathcal{O}(\epsilon^5)\end{aligned}$$

Kurtosen er dermed gitt som

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{E[\eta^4]}{\sigma^4} + \mathcal{O}(\epsilon) \\ &= \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} + \mathcal{O}(\epsilon) \\ &= 3 + \mathcal{O}(\epsilon)\end{aligned}\tag{3.125}$$

Andre orden

Skriver om overflatehevningen (3.113).

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{1}{2}B_1e^{i\phi} + \frac{1}{2}\alpha B_1^2e^{2i\phi} + \frac{1}{4}|B_1|^2\beta + c.c. + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ &= \frac{1}{2}Ae^{i(\theta+\phi)} + \frac{1}{2}\alpha A^2e^{2i(\theta+\phi)} + \frac{1}{4}A^2\beta + c.c. + \mathcal{O}(\epsilon^3)\end{aligned}\quad (3.126)$$

hvor $B_1 = Ae^{i\theta}$, $\phi = k_c x + \omega_c t$, A er Rayleigh-fordelt, θ er uniformt fordelt og

$$\begin{aligned}\alpha &= k_c \left(\frac{3 - \tanh^2(k_ch)}{4 \tanh^3(k_ch)} \right) \\ \beta &= k_c \left\{ -\frac{c_g^3 \omega_c k_ch}{g(gh - c_g^2)} \left(1 - \tanh^2(k_ch) + \frac{2\omega_c}{k_c c_g} \right) + \left(\frac{\tanh^2(k_ch) - 1}{\tanh(k_ch)} \right) \right\}\end{aligned}$$

Finner forventningsverdien til (3.126) fra ligning (2.12).

$$\begin{aligned}\mu = E[\eta] &= \frac{1}{2}E[A]E[e^{i\theta}]e^{i\phi} + \frac{1}{2}\alpha E[A^2]E[e^{2i\theta}]e^{2i\phi} + \frac{1}{4}E[A^2]\beta + c.c. + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ &= \frac{1}{4}E[A^2]\beta + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ &= \frac{1}{2}\sigma^2\beta + \mathcal{O}(\epsilon^3)\end{aligned}\quad (3.127)$$

Bruker ligning (2.14) og finner variansen til (3.126).

$$\begin{aligned}\sigma^2 = E[(\eta - \mu)^2] &= E\left[\left(\frac{1}{2}Ae^{i(\theta+\phi)} + \frac{1}{2}\alpha A^2e^{2i(\theta+\phi)} + \frac{1}{4}A^2\beta + c.c. - \frac{1}{2}\sigma^2\beta\right)^2\right] \\ &= E\left[\frac{1}{4}A^2e^{2i(\theta+\phi)} + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{4}A^2e^{-2i(\theta+\phi)} + \frac{1}{4}\alpha A^3e^{3i(\theta+\phi)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4}\alpha A^3e^{-i(\theta+\phi)} + \frac{1}{4}\alpha A^3e^{-3i(\theta+\phi)} + \frac{1}{4}\alpha A^3e^{i(\theta+\phi)} + \mathcal{O}(\epsilon^4)\right] \\ &= \frac{1}{2}E[A^2] + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ &= \sigma^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4)\end{aligned}\quad (3.128)$$

Da α er reell trenger vi ikke komplekskonjugere denne.

Finner skjevheten fra (2.17).

$$\begin{aligned}
E[(\eta - \mu)^3] &= E \left[\left(\frac{1}{2} A e^{i(\theta+\phi)} + \frac{1}{2} \alpha A^2 e^{2i(\theta+\phi)} + \frac{1}{4} A^2 \beta + c.c. - \frac{1}{2} \sigma^2 \beta \right)^3 \right] \\
&= E \left[\frac{1}{8} A^3 e^{3i(\theta+\phi)} + \frac{3}{8} A^3 e^{i(\theta+\phi)} + \frac{3}{8} A^3 e^{-i(\theta+\phi)} + \frac{1}{8} A^3 e^{-3i(\theta+\phi)} \right. \\
&\quad + \frac{1}{8} \alpha A^4 e^{4i(\theta+\phi)} + \frac{1}{8} \alpha A^4 + \frac{1}{4} \alpha A^4 e^{2i(\theta+\phi)} + \frac{1}{4} \alpha A^4 e^{-2i(\theta+\phi)} \\
&\quad + \frac{1}{8} \alpha A^4 + \frac{1}{8} \alpha A^4 e^{-4i(\theta+\phi)} + \frac{1}{8} \alpha A^4 e^{4i(\theta+\phi)} + \frac{1}{8} \alpha A^4 e^{2i(\theta+\phi)} \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \alpha A^4 + \frac{1}{4} \alpha A^4 + 3\sigma^4 \beta + \dots + \mathcal{O}(\epsilon^5) \right] \\
&= \frac{3}{4} \alpha E[A^4] + 3\beta \sigma^4 + \mathcal{O}(\epsilon^5) \\
&= 6\alpha \sigma^4 + 3\beta \sigma^4 + \mathcal{O}(\epsilon^5)
\end{aligned}$$

Skjevheten er dermed gitt som

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{E[(\eta - \mu)^3]}{\sigma^3} \\
&= \frac{6\alpha \sigma^4 + 3\beta \sigma^4}{\sigma^3} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&= 6\alpha \sigma + 3\beta \sigma + \mathcal{O}(\epsilon^2)
\end{aligned} \tag{3.129}$$

Første del av dette resultatet kan gjenkjennes i grensen av uendelig dypt vann fra ligning (2.16) i Srokozs & Longuet-Higgins (1986). Årsaken til dette finner vi fra ligning (2.3) og (2.15) i samme artikkel. Fra (2.3) har vi $\bar{a} = \sqrt{2}\sigma$. Slår vi dette sammen med (2.15) og (2.16) får vi nettopp tilsvarende løsning som første del av (3.129) i grensen av uendelig dypt vann.

På samme måte finner vi kurtosen fra (2.18). Tar her kun med de leddene som gir bidrag til kurtosen, det vil si ledd med $e^{0i\theta}$.

$$\begin{aligned}
E[(\eta - \mu)^4] &= E \left[\left(\frac{1}{2} A e^{i(\theta+\phi)} + \frac{1}{2} \alpha A^2 e^{2i(\theta+\phi)} + \frac{1}{4} A^2 \beta + c.c. - \frac{1}{2} \sigma^2 \beta \right)^4 \right] \\
&= E \left[\frac{6}{16} A^4 + \text{ledd med } e^{ni(\theta+\phi)} + \mathcal{O}(\epsilon^6) \right] \\
&= \frac{6}{16} E[A^4] + \mathcal{O}(\epsilon^6) \\
&= 3\sigma^4 + \mathcal{O}(\epsilon^6)
\end{aligned} \tag{3.130}$$

Kurtosen er dermed gitt som

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{E[(\eta - \mu)^4]}{\sigma^4} \\
&= \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&= 3 + \mathcal{O}(\epsilon^2)
\end{aligned} \tag{3.131}$$

Kurtosen til andre orden er dermed den samme som kurtosen til første orden.

Tredje orden

Til tredje orden får kurtosen et korreksjonsledd. Som nevnt over vil det å ta pertubasjonsanalysen og utregningen av kurtosen opp til tredje orden være såpass krevende at tiden som er satt av til denne avhandlingen ikke strekker til. Derfor har vi gått til litteraturen og funnet denne korreksjonen for en smalbåndet prosess i grensen av uendelig dypt vann i ligning (34) i Mori & Janssen (2006).

$$\kappa_{40} = 24\tilde{\epsilon}^2$$

der $\tilde{\epsilon} = k_c \sqrt{m_0}$.

I samme artikkel finner vi m_0 i ligning (11) som $m_0 = \sigma^2$. Dermed får vi $\tilde{\epsilon} = k_c \sigma$ som kan skrives om til notasjonen brukt i denne avhandlingen ved hjelp av den karakteristiske amplituden $a_c = \sqrt{2}\sigma$: $\tilde{\epsilon} = \frac{k_c a_c}{\sqrt{2}} = \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$, der $\epsilon = a_c k_c$. Korreksjonen får da følgende form

$$\kappa_{40} = 12\epsilon^2$$

Da vi befinner oss på endelig dyp i denne avhandlingen må løsningen for kurtosen til tredje orden ganges med en funksjon av $k_c h$. Formen på denne funksjonen kan vi finne i ligning (4.58) i Trulsen (2006).

$$B_3 = \frac{3(3-s^2)(3+s^4)}{64s^4} B^3$$

Dette er en dimensjonsløs ligning med $s = \tanh h$.

For å finne den fulle korreksjonen for kurtosen til tredje orden vil vi måtte finne sammenhengen mellom de to ovenstående ligningene. Dette vil være tidkrevende og gå utenfor tidsrammene til denne avhandlingen.

Kapittel 4

Eksperimentelt arbeid

Dette kapitlet presenterer det eksperimentelle arbeidet i denne avhandlingen. Første delkapittel tar for seg forarbeid og design av eksperimentene, deretter gjennomgås det eksperimentelle oppsettet og arbeidet i laboratoriet. Siste delkapittel går inn på de tekniske utfordringene som er koblet til prosesseringen av rådataene for overflatehevningen.

4.1 Forarbeid

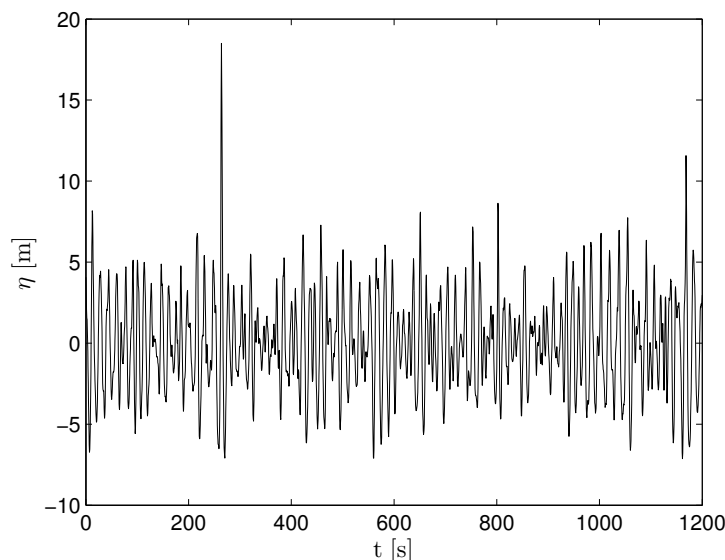
Når man jobber med statistikk er det viktig å sikre at man har nok data til å få gode og pålitelige resultater. Som forarbeid til det eksperimentelle arbeidet i laboratoriet var vi interessert i å finne ut hvordan vi kunne designe eksperimentet på en slik måte at resultatene kunne si noe signifikant om kurtosen. Til dette brukte vi tilgjengelige måldata av overflatehevning fra Draupner-plattformen i Nordsjøen og laboratoriet MARIN i Nederland. Under følger resultatene av dette arbeidet.

4.1.1 Draupner

Draupner E er en oljeplattform i Nordsjøen som opereres av Statoil. Den ble bygd i 1994 med et helt nytt forankringssystem i havbunnen. På grunn av dette ble plattformen utstyrt med en del måleinstrumenter, blant annet et instrument som målte overflatehevningen ved det ene beinet. 1.januar 1995 ble det med dette utstyret målt en uvanlig stor bølge som senere fikk navnet Nyttårsbølgen (Haver, 2004).

Som en forberedelse til det eksperimentelle arbeidet tilknyttet denne avhandlingen gjorde vi beregninger på dataene fra Draupner ¹. Figur 4.1 viser tidsserien. Man legger raskt merke til den store bølgen som anses som en freak bølge. Spørsmålet er om tidsserien er lang nok til å kunne si om denne bølgen var en freak bølge eller ikke. For å finne ut av dette måtte vi se på konvergens av kurtosen. Dette ble gjort på to ulike måter, ved punktestimat og bootstrap.

¹Takk til Statoil som har valgt å gjøre disse dataene tilgjengelig.



Figur 4.1: Draupner-tidsserien.

Punktestimat

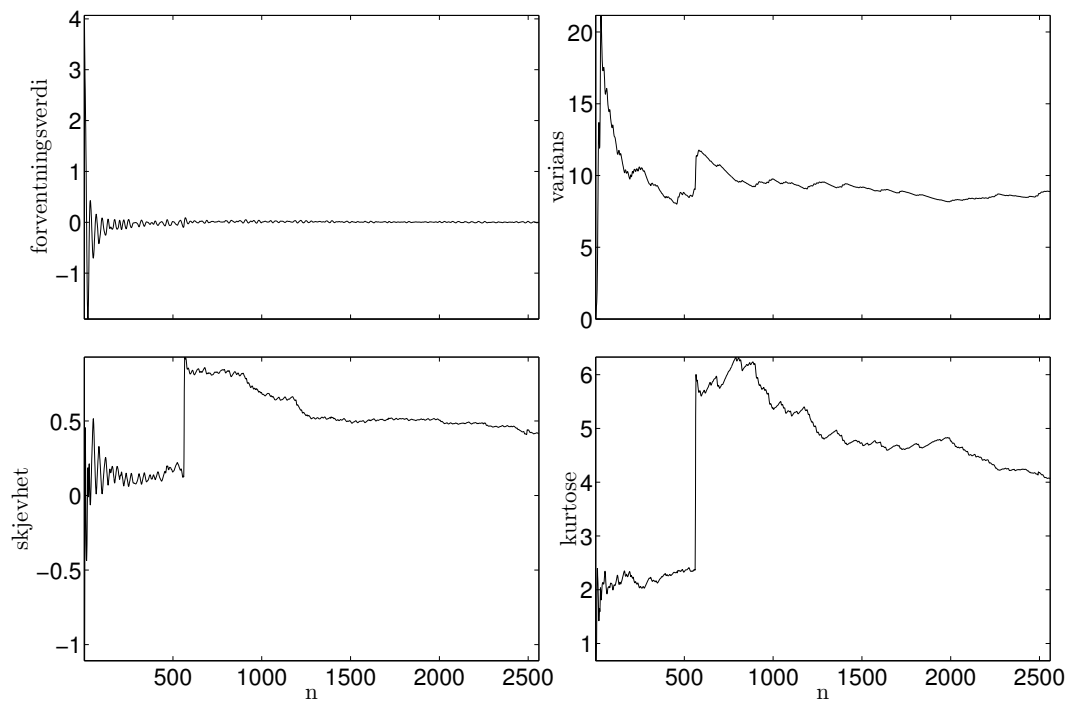
Punktestimatet for forventningsverdi, varians, skjevhet og kurtose sier noe om disse verdiene regnet direkte ut for hele eller deler av tidsserien vi ser på (se delkapittel 2.2 for utregningen av disse parameterne). Når man skal se på konvergens av disse verdiene kan dette gjøres på to ulike måter. For det første kan man beregne punktestimatet for de n første måledataene, der $n = 1, 2, 3, \dots, N$ (N er lengden på hele måleserien). For det andre kan man plukke ut n tilfeldige målinger fra hele tidsserien med tilbakelegg mellom hver gang man plukker måledata ($n = 1, 2, 3, \dots, N$), og beregne punktestimatet for de ulike parameterne fra disse.

Resultatet for punktestimatet av de n første måledataene er vist i figur 4.2. Her ser man tydelig at tidsserien er for kort til at kurtosen konvergerer. Resultatet av punktestimatet for måledataene med tilbakelegging viste lite da hoppet man ser punktestimatene får i figur 4.2 fordelte seg utover i plottene. Dette medførte at det ble mye mindre konvergens enn i figur 4.2.

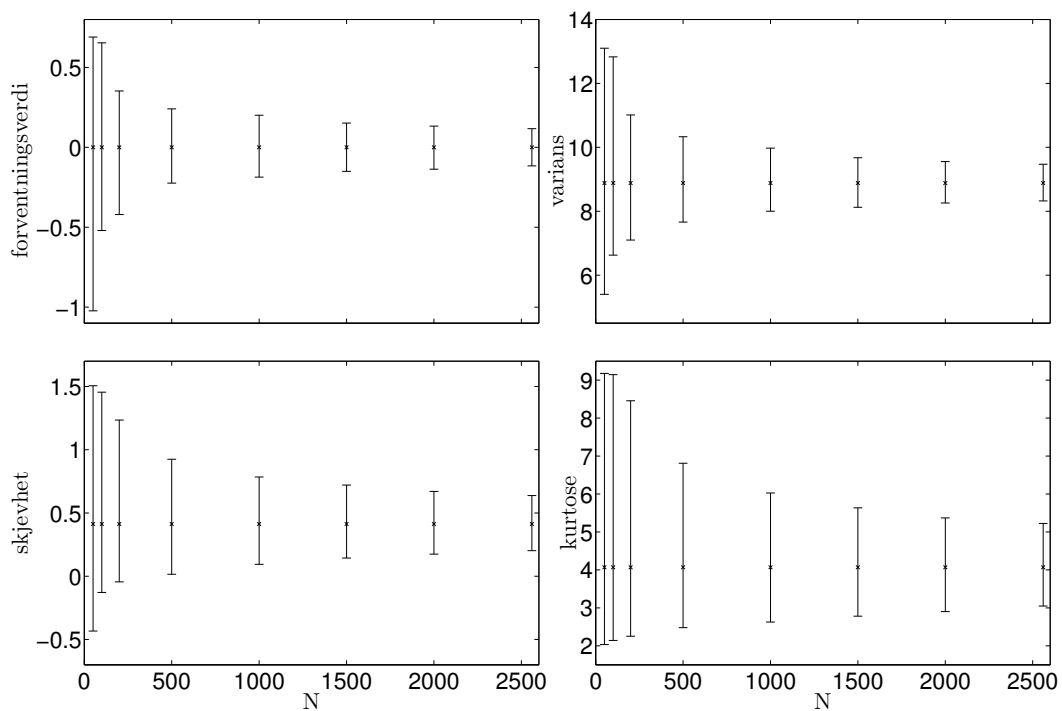
Bootstrap

Da vi ikke kunne trekke noen konklusjon i forhold til kurtosen fra resultatene for punktestimatene, gjorde vi bootstrap-beregninger på tidsserien (se delkapittel 2.4). Målet med dette var å se på konvergering av 95% konfidensintervall for forventningsverdi, varians, skjevhet og kurtose. Ut fra dette var vi interessert i å finne ut om konfidensintervallet for kurtosen kunne si noe signifikant om freake bølger i tidsserien.

Figur 4.3 viser resultatene fra bootstrap-beregningene. x -aksen viser hvor mange måledata vi har plukket ut, N , like mange ganger, N , og beregnet konfindensintervall på. Figuren viser at selv om ikke konfidensintervallene for kurtosen konvergerer ser vi at kurtosen definitivt er høyere enn tre. Dette medfører at vi kan si at det er større forekomst av ekstreme bølger i Draupner-tidsserien enn for en Gaussisk sjø.



Figur 4.2: Konvergens av statistikk for Draupner-tidsserie.



Figur 4.3: 95% konfidensintervall for forventningsverdi, varians, skjevhet og kurtose for Draupner-tidsserien.

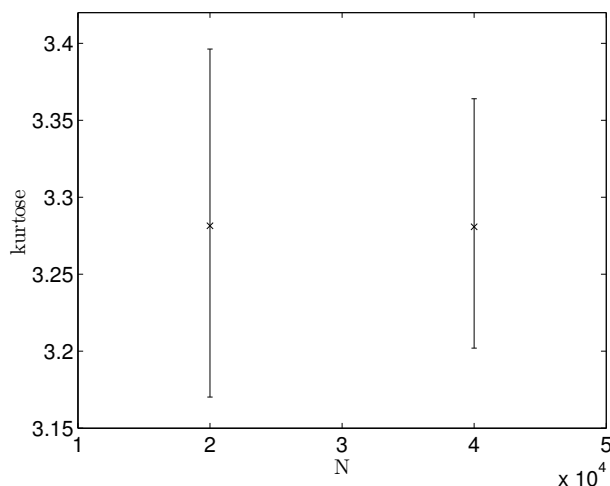
4.1.2 MARIN

I forbindelse med et arbeidsseminar (benchmark workshop) på numerisk bølgemodellering i august 2010 utførte det nederlandske laboratoriet MARIN eksperimenter på irregulære bølger på dypt vann som propagerte over en skrånende bunn (Bunnik, 2010). Trulsen *et al.* (2012) brukte disse dataene til å undersøke konfidensintervall for varians, skjevhet og kurtose. De så også på overskridelsessannsynligheten for amplituden til tidsserien. Som en del av designet for eksperimentene i laboratoriet i denne avhandlingen fikk vi tilgang til disse datasettene. Vi ønsket å finne ut hvor lange realisasjoner vi trengte for å kunne oppnå et konfidensintervall for kurtosen som var smalt nok til å plukke opp toppen som det viser seg kurtosen får ved den grunne delen av steppet (se Figur 6-8 i Trulsen *et al.* (2012)) samt for å få et avvik for overskridelsessannsynlighet fra Rayleigh-fordelingen ved samme sannsynlighetsnivå som i Trulsen *et al.* (2012).

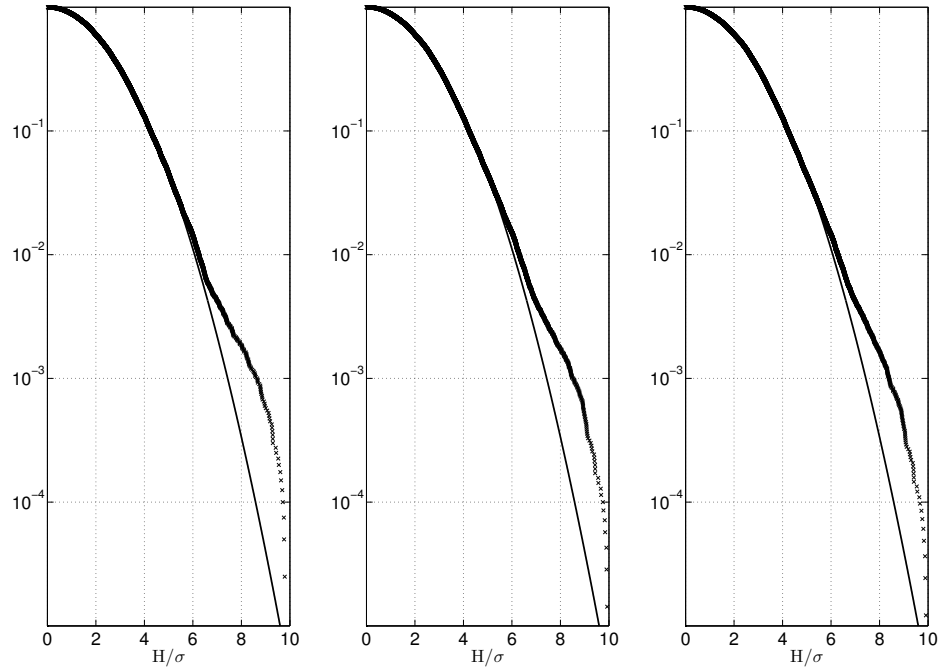
Bootstrap

Basert på Trulsen *et al.* (2012) tok vi bort de 10000 første punktene i datasettet, som tilsvarer 200 s, for å unngå oppstartseffekter. Vi fokuserte på case 3 probe 15 og gjorde bootstrap-beregninger for 95% konfidensintervall for kurtose. Basert på resultatene i Trulsen *et al.* (2012) fant vi ut at vi måtte ha et konfidensintervall for kurtosen som var høyst 0,2 bredt for å skille ut maksimumet kurtosen får ved den grunne delen av steppet.

Vi utførte bootstrap-beregninger på de 20000 og 40000 første punktene i tidsserien trukket like mange ganger med tilbakelegg. Figur 4.4 viser resultatene av dette. Her ser man at konfidensintervallet for 20000 punkter trukket 20000 ganger er for bredt i forhold til det vi ønsket, men 40000 punkter plukket 40000 ganger gir et smalt nok konfidensintervall. Dermed kunne vi konkludere med at vi måtte ha realisasjoner som tilsvarer 40000 samplinger for MARIN-dataene. Dette tilsvarer $\frac{40000 \cdot 0,02 \text{ s}}{2,121 \text{ s}} \approx 377$ bølgeperioder. Eksperimentene som skal utføres i denne avhandlingen skal i følge tabell 1.1 og 1.2 ha en maksimum bølgeperiode på 1,1 s. Dermed følger det at realisasjonene må være omtrent $414,7 \text{ s} \approx 6,9 \text{ min}$.



Figur 4.4: Kurtose med 95% konfidensintervall for MARIN-data

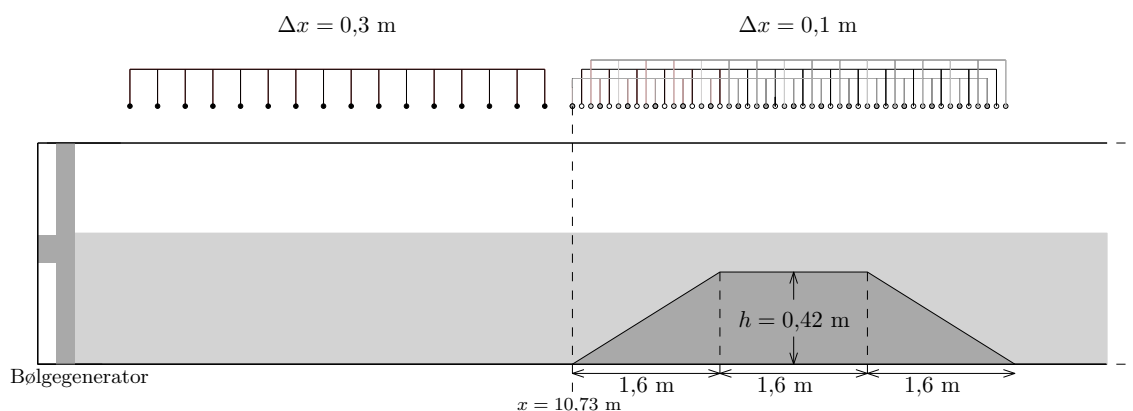


Figur 4.5: Fra venstre: overskridelsessannsynlighet for de 40000 første punktene i tidsserien, 70000 første punktene i tidsserien og for hele tidsserien til MARIN case 3 probe 15.

Overskridelsessannsynlighet

Videre så vi på overskridelsessannsynlighet for bølgehøyden ved hjelp av Hilbert-transform (se delkapittel 2.5). I Trulsen *et al.* (2012) er overskridelsessannsynligheten beregnet for amplituden til bølgene mens vi i denne avhandlingen har valgt å beregne denne for bølgehøyden. Valget om å beregne overskridelsessannsynligheten for bølgehøyde eller amplitude avhenger av hvilket frekvbølgekriteriet man ønsker å bruke. I denne avhandlingen har vi valgt å bruke kriteriet for bølgehøyde $H > 2H_s$ (se kapittel 1). Vi beregnet overskridelsessannsynligheten for de n første punktene i tidsserien fra case 3 probe 15 der $n = 1, 2, 3, \dots, N$ og N er lengden på hele tidsserien. Grunnen til dette var at vi ønsket å finne for hvilken n man kunne se avvik fra Rayleigh-fordelingen ved samme sannsynlighetsnivå som resultatene i figur 9 i Trulsen *et al.* (2012). Figur 4.5 viser resultatene for henholdsvis de 40000 første, 70000 første og alle punktene i tidsserien (det som tilsvarer figur 9 case 3 probe 15 i artikkelen, men her beregnet for bølgehøyde).

Da overskridelsessannsynligheten for de 70000 første punktene hadde et avvik fra Rayleigh-fordelingen ved samme sannsynlighetsnivå som overskridelsessannsynligheten for hele tidsserien, konkluderte vi med at vi måtte ha en lengde på tidsseriene vi skulle bruke i eksperimentene som tilsvarte 70000 datapunkter for MARIN-dataene. Dette er det samme som $\frac{70000 \cdot 0,02 \text{ s}}{2,121 \text{ s}} \approx 660$ bølgeperioder. Eksperimentene tilknyttet denne avhandlingen skal ha en maksimum bølgeperiode på 1,1 s som medfører at tidsseriene må være omtrent $726 \text{ s} \approx 12 \text{ min}$.



Figur 4.6: Eksperimentelt oppsett.

4.2 Eksperimentene

Eksperimentet ble utført i bølgetanken på Hydrodynamisk Laboratorium ved Universitetet i Oslo. Bølgetanken er 24,6 meter lang og 0,5 meter bred. Overflatehevingen ble målt med 16 ultralydprober som er plassert i en avstand på $\Delta x = 0,3$ meter fra hverandre. De 16 probene er festet i et stativ som kan beveges langs tanken.

I den ene enden av tanken er det en hydraulisk bølgegenerator som genererer overflatehevingen. Generatoren kontrolleres av et dataprogram, WaveLab©. Som input til WaveLab© sender man filer med overflateheving gitt i volt. Dette styrer bevegelsen til bølgegeneratoren. Bølgene som genereres forplanter seg med bølgetopper og bunner som har bredde lik tankens bredde, noe som medfører at bølgefeltet vi betrakter i tanken er todimensjonalt. I motsatt ende av tanken fra bølgegeneratoren er det en dempende strand. Alle inputfilene til bølgegeneratoren som er brukt i denne avhandlingen har en scanrate på 50Hz. Scanrate sier noe om hvor mange elementer inputfilen sender til bølgegeneratoren hvert sekund. Se tillegg A.1 for hvordan inputfilene blir generert.

Med bakgrunn i resultatene fra prosesseringen av Draupner-tidsserien og tidsserien fra MARIN valgte vi at realisasjonene i eksperimentene skulle være 15 min lange. Tidsseriene ble laget av et Matlab-program som bruker JONSWAP-spekteret med $\gamma = 3,3$ (se tillegg A.1). Vi så på en realisasjon for hver tidsserie og kalibrerte amplituden til hver tidsserie slik at ikke steppet ble tørrlagt eller at bølgene brøt over steppet.

Med bakgrunn i Gauss' sats og bevaring av energiflukstetthet for stasjonære forhold (se delkapittel 2.6) antar vi at det er størst sannsynlighet for at bølgene vil bryte på den grunne delen av steppet. Grunnen til dette er at dersom vi innsetter gruppehastigheten for vilkårlig dyp (3.105) i ligning (2.33) ser vi at bølger som propagerer fra dypere til grunnere vann vil oppleve en liten økning i amplituden. Ut fra dette ble kalibreringen av tidsseriene gjort manuelt ved å observere om bølgefeltene brøt på toppen av steppet. Vi forsøkte da å velge en amplitude for hver tidsserien da dette akkurat ikke skjedde.

4.2.1 Oppsett

Hele stativet med de 16 ultralydprobene ble brukt i alle eksperimentene. Disse probene ble brukt i fire ulike posisjoner langs tanken som vi kalte posisjon 1–4. Posisjon 1 er nærmest



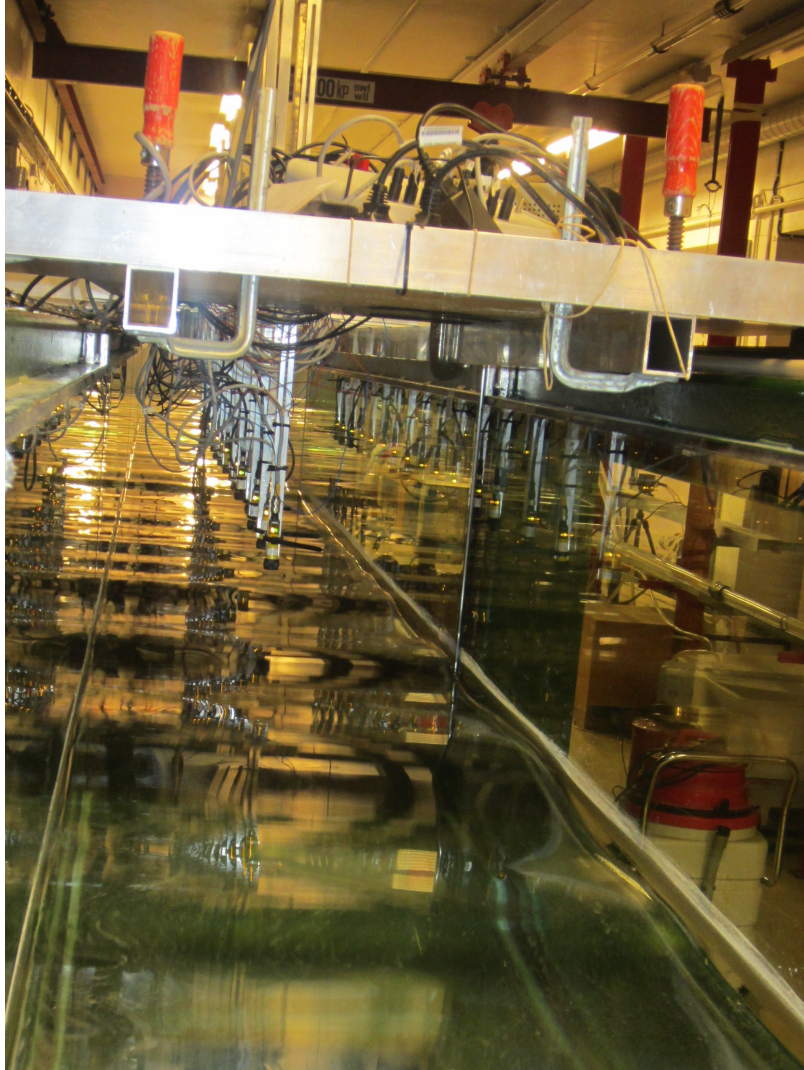
Figur 4.7: Prober, step og overflateheving.

bølgegeneratoren, mens posisjon 4 er lengst vekk fra bølgegeneratoren. Det ble bygget et step etter målene i figur 1.2 med bredde lik tankens bredde. Dette steppet ble plassert omtrent midt i tanken. Figur 4.6 viser en skisse av det eksperimentelle oppsettet, mens figurene 4.8 og 4.7 viser bilder av oppsettet i laboratoriet.

4.2.2 Prober

Probene som ble brukt i eksperimentene heter *U-GAGE S18U* og er produsert av Banner®. Disse probene er vertikalt plassert over vannoverflaten og er ikke-intrusive. Det betyr at de gjør målinger uten påvirkning på det som måles. Probene gjør målinger ved at de sender ut en eller flere pulser med ultralydenergi som beveger seg gjennom luften med lydfarten. Energien treffer vannoverflaten og noe returneres tilbake til probene der en mottaker registrerer det returnerende signalet.

Probene kan måle innenfor en rekkevidde på 3–30 cm, men det er begrensninger på hvor bratte overflatene som probene måler kan være. Hvor bratte overflatene kan være avhenger av hvilken rekkevidde man velger at probene skal måle innenfor. Den minste verdien probene kan måle innenfor har en maksimumvinkel på overflaten på 10° . Denne vinkelen synker til 5° når rekkevidden øker, men den synker raskest for de første 5 cm av rekkevidden, det vil si fra 3–8 cm (Banner, 2013). Dersom overflaten probene måler er brattere enn den maksimale vinkelen, sendes ultralydsignalet bort fra probene. Dette medfører at probene ikke kan måle avstanden til overflaten. I tilfeller da probene måler bølger vil dette føre til at dersom bølgene er for steile, vil man se dropouts i måleserien. Dette tas nærmere opp i delkapittel 4.3.2.



Figur 4.8: Prober

Probene måler avstanden til vannoverflaten på følgende måte

$$D = \frac{ct}{2} \quad (4.1)$$

der D er avstanden til overflaten, $c \approx 343$ m/s er lydhastigheten i luft, og t er tiden det tar fra signalet sendes ut til det retuneres til mottakeren. For å øke nøyaktigheten kan det hende probene midler over flere pulser (Banner, 2013).

I alle eksperimentene tilknyttet denne avhandlingen var ultralydprobene innstilt med en samplingfrekvens på 200 Hz. Nullnivået var satt til 15 cm over vannoverflaten og probene var trigget til å starte å måle overflatehevningen samtidig som bølgegeneratoren startet.

Størrelsen på vinduet probene måler innenfor kalibreres manuelt. Dersom man ønsker et vindu på ± 5 cm gjøres dette ved å plassere probene i den avstanden man ønsker de skal være over den stille vannoverflaten og trykke på den eneste knappen som finnes på probene tre ganger. Dersom man skulle ønske å ha et vindu som var større enn ± 5 cm må dette innstilles manuelt ved å kalibrere probene i posisjonen man ønsker skal være maksimum- og minimumsverdien for vinduet, ut fra avstanden man ønsker de skal ha over vannoverflaten (se Banner (2013) for mer detaljert beskrivelse). I alle eksperimentene tilknyttet denne avhandlingen var ultralydprobene innstilt til å ha et målevindu på ± 5 cm.

4.3 Overflatehevning

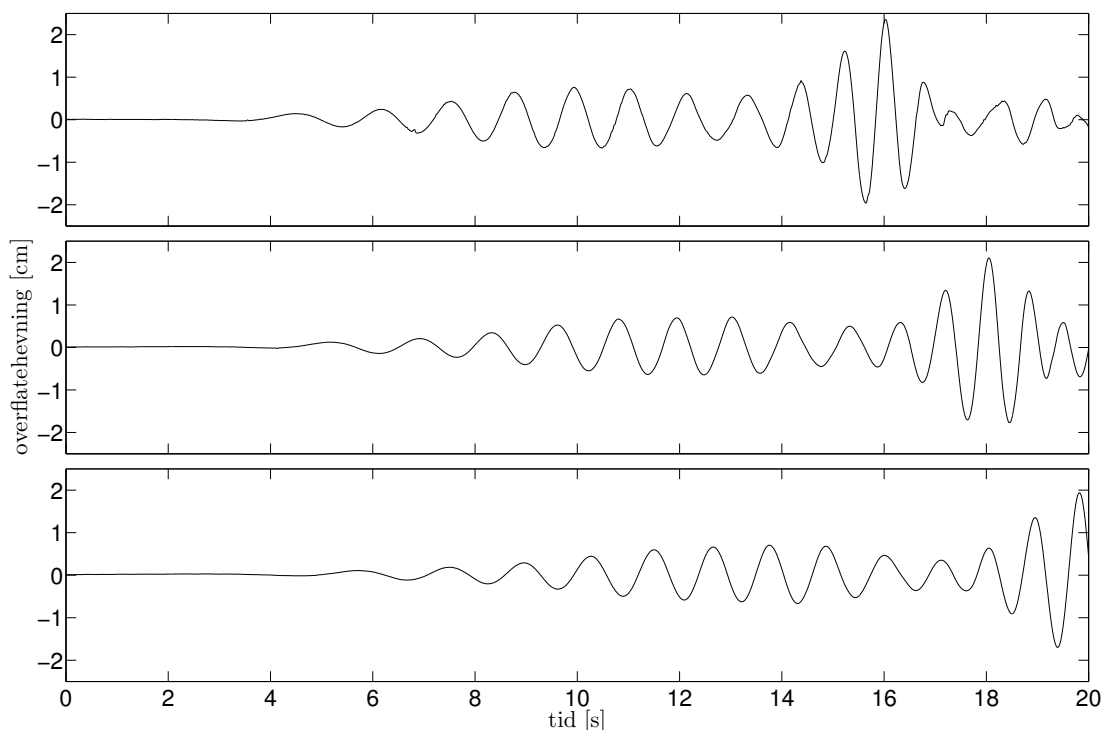
Overflatehevningen ble målt i 15 min, som tilsvarer 180000 målinger når frekvensen er satt til 200 Hz, med 16 prober i 4 ulike posisjoner. Probene tilfører en del støy til dataene. Dette medfører at rådataene må bearbeides før de kan benyttes til statistiske beregninger. Under følger gjennomgang av denne bearbeidingen og forklaring på hvorfor dette er nødvendig.

4.3.1 Oppstartseffekter

Da probene begynner å måle overflatehevningen med en gang bølgegeneratoren setter i gang, vil alle tidsseriene inneholde oppstartseffekter fra bølgegeneratoren. Probene måler da først stille vann før bølgene når fram til probene. Figur 4.10 viser dette for tidsserie 5 for henholdsvis probe 10, 12 og 15 i posisjon 1. I tillegg er det velkjent at bølger i fronten av et bølgetog kan bli mer ekstreme enn resten av bølgefeltet. På grunn av disse oppstartseffektene valgte vi å kutte vekk det første minuttet av målingene. Tidsseriene ble dermed $200\text{Hz} \cdot (14 \cdot 60)\text{s} = 168000$ punkter lange.

4.3.2 Filter

Rådata fra probene inneholder en del støy. Det er i hovedsak to grunner til denne støyen. Det ene kommer av at dersom bølgene under proben er for steile vil ultralydsignalet ikke bli returnert tilbake til proben. Da vil det i stedet bli sendt i en annen retning (se delkapittel 4.2.2). Dersom dette skjer er probene innstilt slik at de gir en default-verdi til målepunktene på disse plassene. Default-verdien er satt til maksimumsverdien man har kalibrert målevinduet til å ha. Man kan da tydelig observere disse «dropoutsene» i tidsseriene. Den andre typen støy probene gir er en høyfrekvent støy i positiv retning til overflatehevningen. Det er usikkert hva denne støyen kan komme av, men muligens



Figur 4.9: Overflatehevingen ved oppstart av bølgegeneratoren for tidsserie 5 probe 10, 12 og 15.

kommer det fra oppkoblingen av systemet da det er lite jording i DAQ-kortet probene er koblet til.

Vi ønsket å fjerne denne støyen før vi utførte statistiske beregninger på tidsseriene. Det er utviklet to filtre som skal fjerne støyen tilknyttet resultater fra overflatehevningsmålinger ved Hydrodynamisk Laboratorium. Disse filterne er utviklet av Odin Gramstad (`RemovePeaks`) og Tore Magnus A. Taklo (`RemoveDropouts`). I denne avhandlingen tok vi utgangspunkt i disse filterne og skrev våre egne filtre, to som fjerner og interpolerer støyen (`InterpolateDropouts` og `InterpolatePeaks`) og to som bare fjerner støyen (`RemoveDropouts` og `RemovePeaks`) (se tillegg A.3).

Filterne som fjerner og eventuelt interpolerer dropouts har to kriterier for å fjerne punkter. Det første er at punkter som har en verdi som er over en gitt terskelverdi fjernes ved å sette verdien til NaN (Not a Number). For eksempel er vinduet vi har brukt for målingene på ± 5 cm. Derfor settes verdien til punkter der det er dropouts til 5. Dersom man da setter terskelen til å være 4,8 blir alle punkter som har verdi over 4,8 fjernet. Det andre kriteriet er at punkter som ligger en gitt terskelverdi fra hverandre fjernes. Begge disse tersklene er input til filteret og justeres manuelt i forhold til dataene man ser på.

Filterne som fjerner og eventuelt interpolerer den høfrekvente støyen bruker en innebygd Matlab-funksjon, `findpeaks`, til å bestemme de lokale toppene. Denne funksjonen har en input som velges manuelt og som gir den minimale avstanden som disse toppene skal ligge fra nabopunktene.

For å interpolere tidsseriene er det brukt Matlab-funksjonen `interp`. I denne funksjonen kan man fritt velge mellom ulike interpolasjonsmetoder. I Taklo (2012) ble det undersøkt

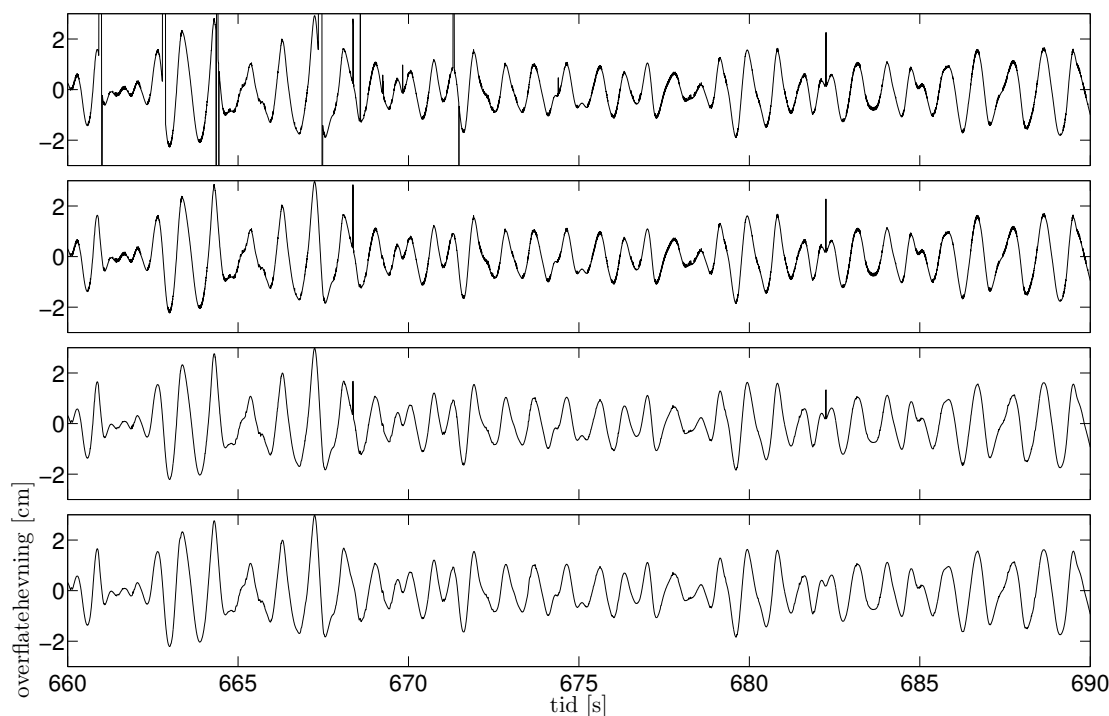
forskjellen på disse ulike interpolasjonene. Resultatet ble at den kubiske interpolasjonen ga et best resultat for overflatehevning. Derfor valgte både Taklo og Gramstad å bruke denne i filterne. Vi valgte derfor det samme.

Etter å ha gjort en del beregninger på tidsseriene oppdaget vi noe støy i rådataene som ikke hadde blitt plukket opp av filterne. Disse kan sees i tredje plottet fra toppen i figur 4.10. Vi utviklet dermed et nytt filter ut fra en ide fra Karsten Trulsen. Dette filteret ser på stigningstall mellom nabopunkter og fjerner de punktene som har stigningstall over en gitt terskelverdi. Følgende krav blir brukt

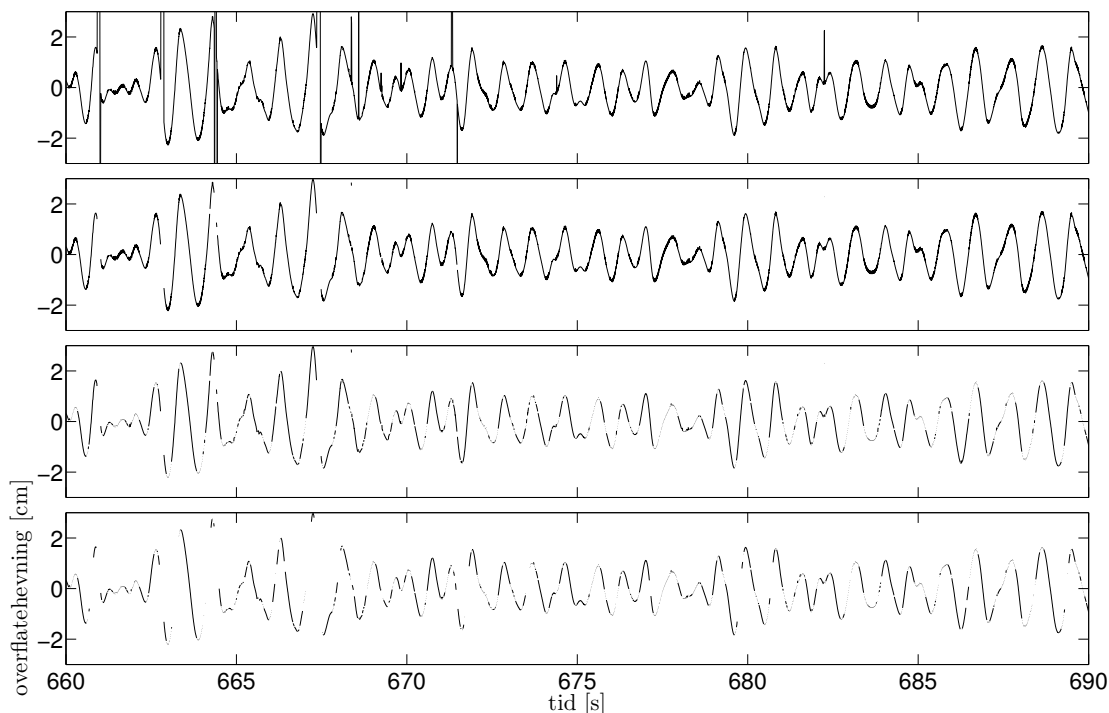
$$\left| \frac{\eta(t_{n+1}) - \eta(t_n)}{t_{n+1} - t_n} \right| > \text{terskel} \quad (4.2)$$

For dette filteret ble det også laget en versjon som interpolerer og fjerner støyen (**InterpolateSpikes**) og et som kun fjerner støyen (**RemoveSpikes**) (se tillegg A.3).

Figur 4.10 viser henholdsvis rådata, fjernet og interpolert dropouts, fjernet og interpolert peaks og fjernet og interpolert spikes fra toppen og ned. Mens figur 4.11 viser henholdsvis rådata, fjernet dropouts, fjernet peaks og fjernet spikes, alle uten interpolasjon fra toppen og ned.



Figur 4.10: Overflatehevningen filtrert med de ulike filterene med interpolasjon.



Figur 4.11: Overflatehevningen filtrert med de ulike filterene uten interpolasjon.

4.3.3 Repeterbarhet

Da vi måler det samme bølgefeltet i fire ulike posisjoner er det viktig å forsikre seg om at bølgegeneratoren genererer det samme bølgefeltet ved hver kjøring. For å undersøke dette brukte vi en korrelasjonsfaktor, co .

$$co = \frac{\sum_n (\eta_1(t_n) - \eta_2(t_n))^2}{\sum_n (\eta_1(t_n)^2 + \eta_2(t_n)^2)} \quad (4.3)$$

Denne faktoren er proporsjonal med $1/100$ og skal være så lav som mulig for å få god repeterbarhet. Overflatehevningene er helt korrelerte dersom denne er 0.

Som nevnt tidligere ble det eksperimentelle arbeidet utført sammen med en annen student, Lisa Bæverfjord Rye. Da vi utførte hennes forsøk, som ble gjort i samme bølgetank som ble brukt til forsøkene tilknyttet denne avhandlingen, gjorde vi tre repetisjoner ved hver av de tre posisjonene hun brukte. Korrelasjonsfaktoren ble da maksimalt ca. 0,04. Det viser god korrelasjon. Med bakgrunn i dette resultatet tok vi en avgjørelse om at vi kjørte to repetisjoner ved en av posisjonene og en repetisjon ved resten for hver tidsserie vi undersøkte i tilknytning til denne avhandlingen. Resultatene for korrelasjonsfaktoren mellom de to kjøringene som ble gjort ved samme posisjon for hver av tidsserien ble også på maks 0,04.

Kapittel 5

Resultater

I det følgende gjennomgås resultatene fra det eksperimentelle arbeidet. Kapittelet er delt i fire delkapittel. Første delkapittel presenterer en oversikt over alle eksperimentene som ble utført. Deretter følger en gjennomgang av resultatene for punktestimatene for varians, skjevhet og kurtose, samt steilhet, Ursell-parameter og freakbølgesannsynlighet for alle tidsseriene. Videre legges resultatene fra beregningene av 95% konfidensintervall ved hjelp av bootstrap-metoden for varians, skjevhet og kurtose for alle tidsseriene fram, før siste delkapittel presenterer overskridelsessannsynligheten for noen utvalgte posisjoner i tanken.

5.1 Oversikt over alle tidsseriene

I tillegg til de markerte tidsseriene i tabell 1.1 og 1.2 valgte vi å generere to ekstra tidsserier med $T_p = 0,75$ og $0,85$. Dette var fordi vi ønsket flere resultater fra det området det virket som om transisjonen mellom de to regimene diskutert i innledningen var. Tabell 5.1 viser disse tidsseriene.

T_p (s)	λ_1 (m)	$k_1 h_1$	$c_{g1} \omega / g$	$k_2 h_2$	$c_{g2} \omega / g$	L / λ_1
0,75	0,88	4,29	0,501	1,44	0,591	1,82
0,85	1,13	3,35	0,507	1,20	0,599	1,42

Tabell 5.1: Tillegg til tabell 1.2, $L = 1,6$ m, $H = 0,42$ m, $h_1 = 0,6$ m. Indeks 1 angir dypt vann, indeks 2 angir grunt vann.

En oversikt over alle tidsseriene vi betraktet i laboratoriet og ulike parametere tilknyttet disse, vises i tabell 5.2. Se delkapittel 2.1 for utregning av de ulike parameterne. For å øke nøyaktigheten ble både den karakteristiske amplituden og den signifikante bølgehøyden midlet over alle probene henholdsvis før og på toppen av steppet (ved konstant dyp).

Figurene 5.1 og 5.2 viser oversikt over steilheten og Ursell-parameteren plottet mot $k_p h$ for alle tidsseriene på den dypere og den grunnere siden av steppet. Da målet med oppgaven var å finne transisjonen mellom grunt og dypt vann på toppen av steppet, har vi kun vært opptatt av verdien på $k_p h$ på toppen av steppet. Vi tok dermed bare hensyn til at vannet i forkant av steppet skulle være dypt (på høyre side av den lokale maksimumsverdien den dimensjonsløse gruppehastigheten har i figur 1.1), ikke hvor dypt det skulle være sammenlignet med dypet på toppen av steppet. Dette gjenspeiler seg i figurene 5.1a og

Tidsserie	T_p [s]	h_1/h_2 [m]	Dypere side				Grunnere side			
			H_s [m]	$k_p h$	$k_p a_c$	Ur	H_s [m]	$k_p h$	$k_p a_c$	Ur
1	0,7	0,5/0,08	0,0168	4,11	0,0489	0,00070	0,0145	0,911	0,0582	0,0770
2	0,8	0,5/0,08	0,0170	3,16	0,0378	0,0012	0,0151	0,774	0,0517	0,1113
3	0,9	0,5/0,08	0,0172	2,52	0,0306	0,0019	0,0162	0,675	0,0482	0,1565
4	1,0	0,5/0,08	0,0164	2,08	0,0241	0,0027	0,0163	0,60	0,0431	0,1998
5	1,1	0,5/0,08	0,0144	1,76	0,0180	0,0033	0,0148	0,54	0,0353	0,2243
6	0,7	0,6/0,18	0,0212	4,93	0,0617	0,00052	0,0184	1,60	0,0579	0,0141
7	0,75	0,6/0,18	0,0209	4,29	0,0598	0,00076	0,0209	1,44	0,0593	0,0198
8	0,8	0,6/0,18	0,0259	3,78	0,0577	0,0011	0,0230	1,31	0,0593	0,0264
9	0,85	0,6/0,18	0,0274	3,35	0,0541	0,0014	0,0245	1,20	0,0580	0,0334
10	0,9	0,6/0,18	0,0316	3,00	0,0559	0,0021	0,0286	1,11	0,0625	0,0455
11	1,0	0,6/0,18	0,0337	2,45	0,0487	0,0033	0,0310	0,968	0,0590	0,0649

Tabell 5.2: Alle tidsserier. Indeks 1 angir dypt vann, indeks 2 angir grunt vann.

5.2a. Vi kan i utgangspunktet ikke se en tydelig sammenheng mellom parameterne og $k_p h$ i disse figurene, men dersom vi observerer figurene litt nærmere kan vi likevel antyde et skille mellom kjøringene for de to ulike dypene ($h_1 = 0,5$ m og $h_1 = 0,6$ m).

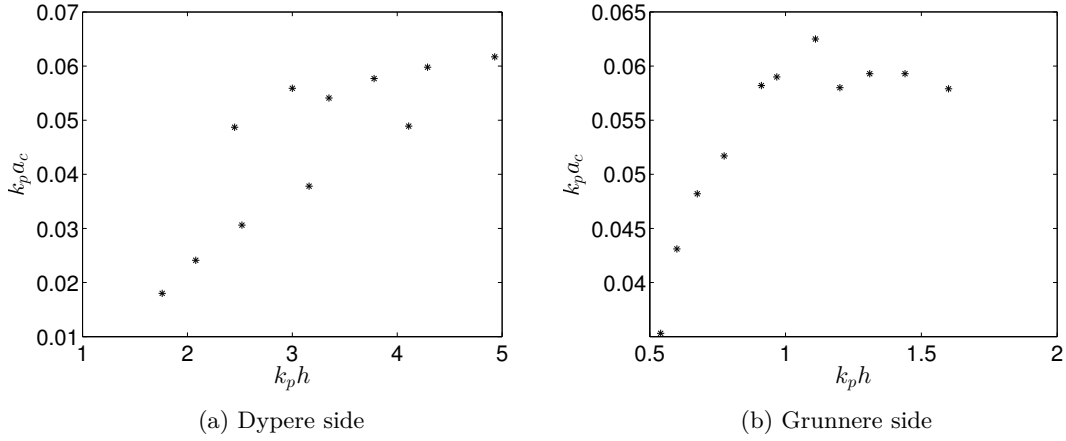
Figur 5.2b viser på den annen side en veldig god sammenheng på tvers av dypene. Forklaringen på dette er at vi gjorde den manuelle kalibreringen på toppen av steppet. Vi kan dermed konkludere med at Ursell-parameteren er en god parameterisering av tidsseriene på den grunne delen av tanken. Årsaken til at figur 5.1b ikke viser like god sammenheng, er at steilheten er en god parameterisering for bølger på dypt vann, mens vannet på toppen av steppet er stort sett nokså grunt. På tross av dette kan vi likevel antyde et skille mellom de to ulike dypene også i denne figuren.

5.2 Punktestimat

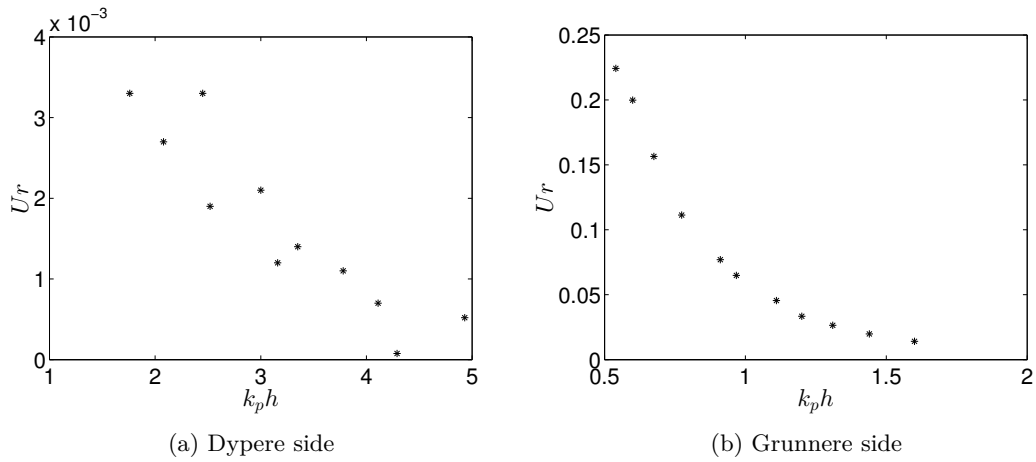
Figurene 5.3–5.8 viser punktestimatene for varians, skjevhet og kurtose samt steilhet, Ursell-parameter og freakbølgesannsynlighet for alle tidsseriene. Alle disse parameterne er plottet som en funksjon av posisjon. Parameterne er beregnet på de filtrerte og interpolerte dataene (se delkapittel 4.3.2). De vertikale stiplede linjene i alle figurene angir posisjonen til steppet.

Resultatet for punktestimatet for variansen til alle tidsseriene sortert etter stigende $k_p h$ på den grunne delen av steppet vises i figur 5.3. Da variansen er dimensjonell og vi betraktet tidsserier for to ulike dyp i tanken kan ikke variansen sammenlignes på tvers av dypene. Vi gjenkjenner lett overgangen mellom disse dypene i figuren (mellom plot en og to fra venstre på andre rad). På tross av dette kan vi observere en systematisk nedgang i variansen langs tanken for alle tidsserier. Dette viser dissipasjonen av bølgefeltet. I tillegg kan vi observere en liten økning i variansen på den grunne delen av steppet for $h_1 = 0,5$ m, mens det er en reduksjon på samme plass for $h_1 = 0,6$ m.

Videre viser figurene 5.4 og 5.5 resultatene for beregningene av steilheten og Ursell-parameteren for alle tidsseriene. Disse parameterne er dimensjonsløse og kan derfor sammenlignes på tvers av dypene. Plottene er også her sortert etter stigende $k_p h$ på den grunne delen av steppet.



Figur 5.1: $k_p a_c$ plottet mot $k_p h$ for alle tidsserier.

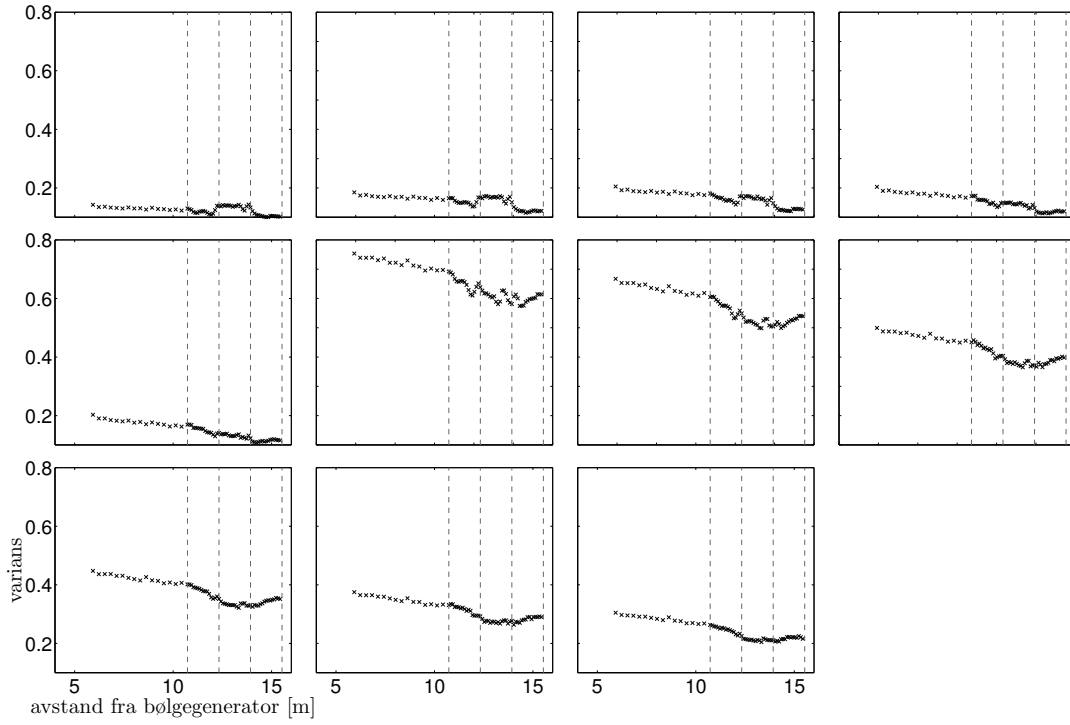


Figur 5.2: $U r$ plottet mot $k_p h$ for alle tidsserier.

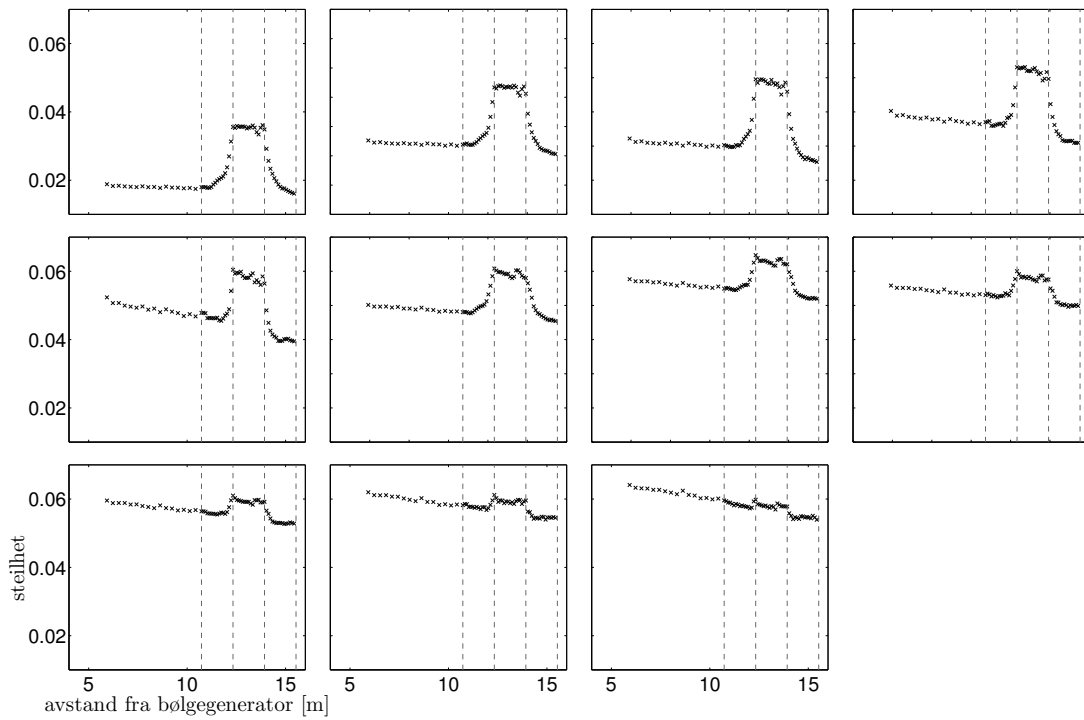
I figur 5.4 kan vi observere en systematisk nedgang i steilheten for alle tidsseriene når bølgene propagerer bortover tanken. Dette er som forventet da steilheten, som variansen, synker når bølgefeltet blir dissipert. I tillegg viser figuren at steilheten har en økning når bølgene propagerer over den grunne delen av steppet. Størrelsen på denne økningen synker med økt $k_p h$ på den grunne delen av steppet. Figuren viser også at steilheten generelt øker for økende dyp over steppet.

På samme måte som for steilheten blir økningen vi observerer Ursell-parameteren har i figur 5.5 når bølgene propagerer over den grunne delen av steppet, mindre for økt dyp over steppet. Forskjellen fra steilheten er at vi ikke observerer en forandring i Ursell-parameteren i forkant av steppet når dypet på den grunne delen av steppet forandres. Dette kommer av at Ursell-parameteren er et mål på ikke-lineariteten i et bølgefelt som propagerer på endelig dyp. Vannet i forkant av steppet er dermed for dypt til at Ursell-parameteren er en god parameterisering.

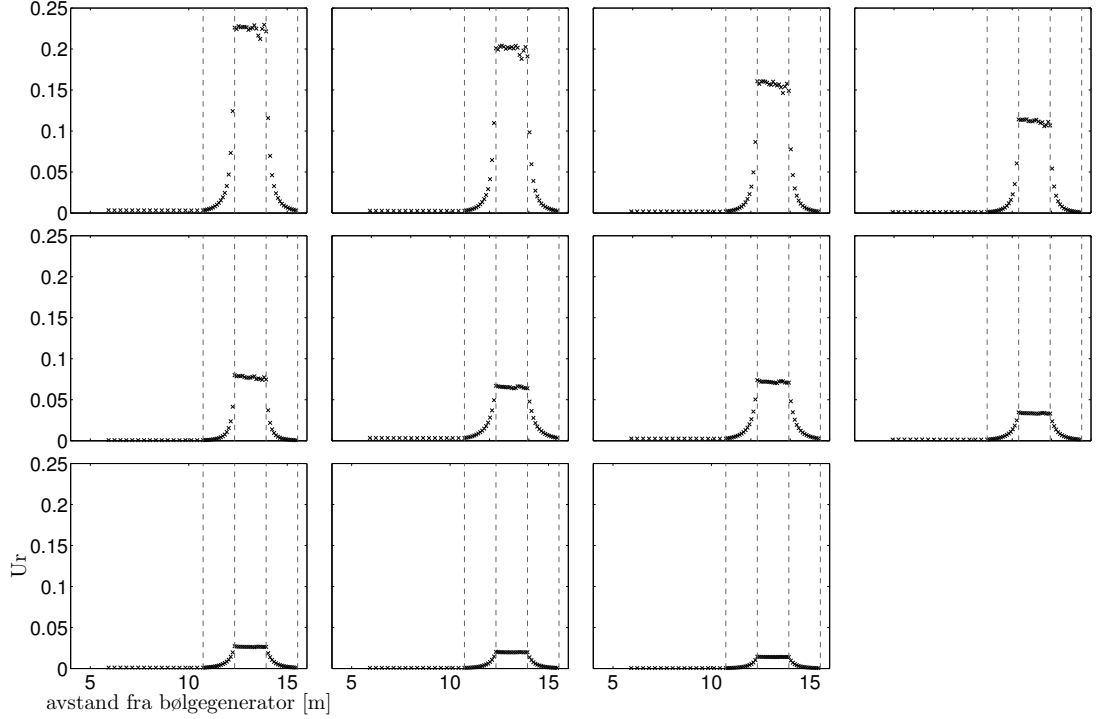
Figurene 5.6 og 5.7 viser henholdsvis punktestimatet for skjevheten og kurtosen for alle tidsseriene sortert etter stigende $k_p h$ på den grunne delen av steppet. Figurene viser at skjevheten er positiv mens kurtosen er høyere enn tre på toppen av steppet samt varierende litt lavere, litt høyere eller akkurat tre i resten av bølgetanken for alle tidsseriene.



Figur 5.3: Varians for alle tidsserier sortert etter stigende $k_p h$ på den grunne delen av steppet. Vertikale stiplede linjer angir posisjonen til steppet.



Figur 5.4: Steilhet for alle tidsserier sortert etter stigende $k_p h$ på den grunne delen av steppet. Vertikale stiplede linjer angir posisjonen til steppet.



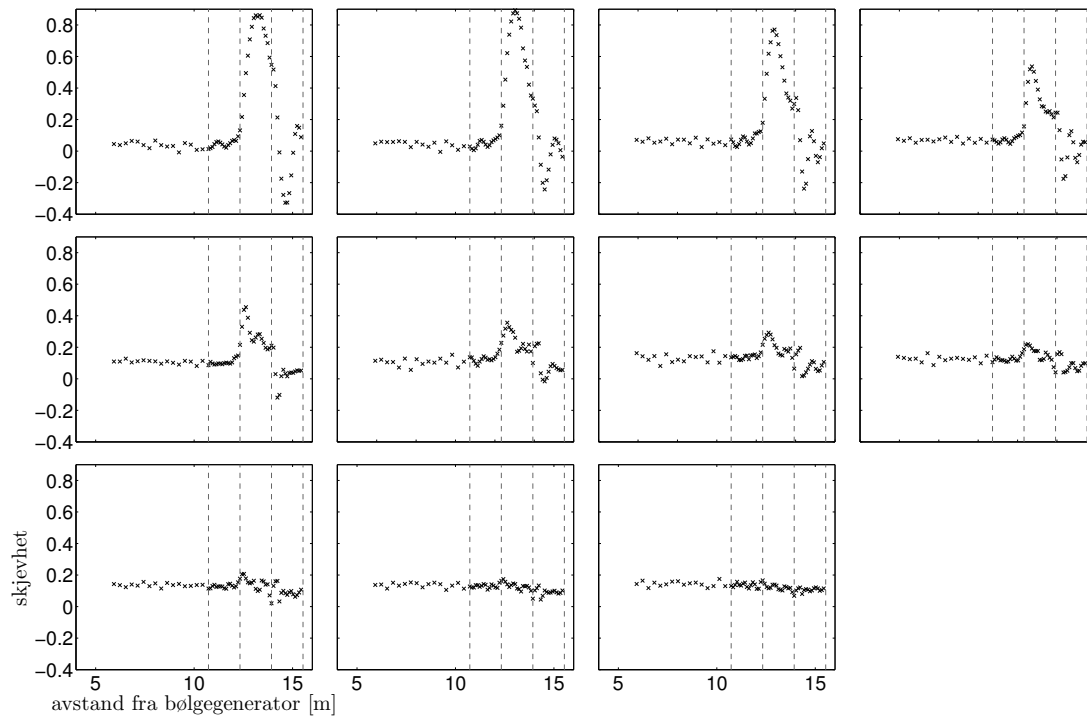
Figur 5.5: Ursell-parameteren for alle tidsserier sortert etter stigende k_ph på den grunne delen av steppet. Vertikale stiplede linjer angir posisjonen til steppet.

Vi kan gjenkjenne det lokale maksimumet skjevheten og kurtosen har der den grunne delen av steppet starter i de fleste plottene i figurene 5.6 og 5.7 fra resultatene i Gramstad *et al.* (2013), Trulsen *et al.* (2012) og Sergeeva *et al.* (2011). Eksperimentene tilknyttet denne avhandlingen har en høyere oppløsningen i rom sammenlignet med resultatene fra Trulsen *et al.* (2012). Dette fører til at vi har plukket opp et lokalt minimum etterfulgt av noe som ser ut som en bølgebevegelse for skjevheten på den nedadgående skråningen av steppet. Det lokale minimumet til skjevheten gjenkjennes i figur 6, 7 og 8 i Gramstad *et al.* (2013), men her kan vi ikke observere bølgebevegelsen.

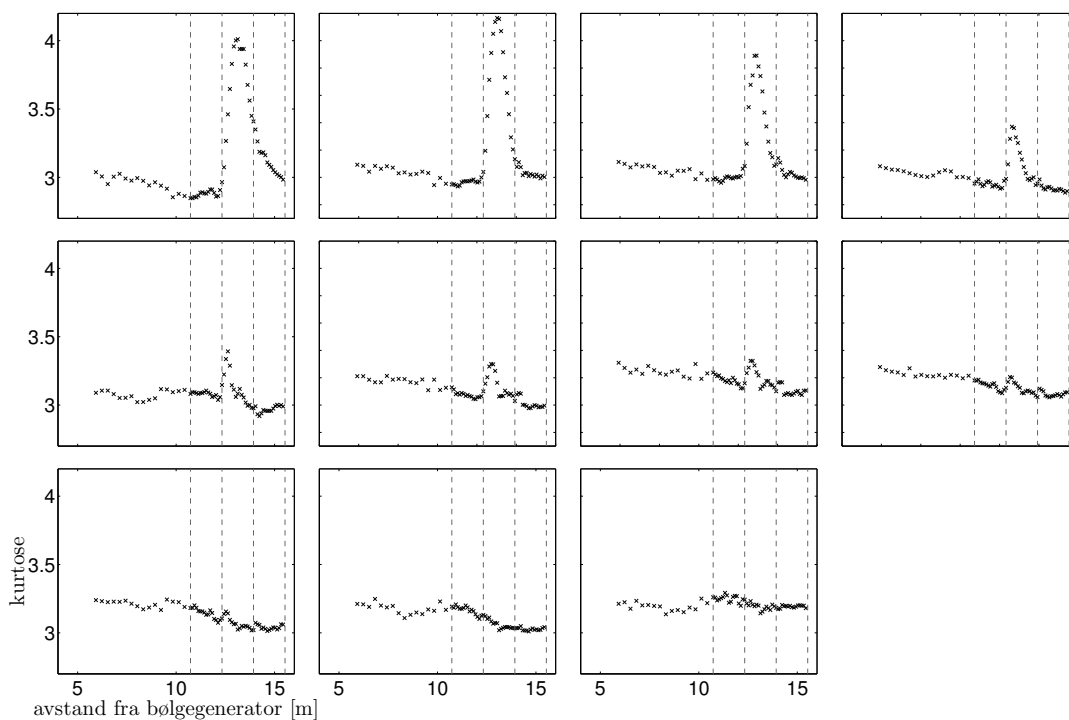
Videre kan vi observere at det lokale maksimumet for kurtosen og skjevheten øker litt mellom plot en og to i første rad, før de minker gradvis for de resterende plottene. Mens det lokale minimumet for skjevhet har kun en gradvis minkende størrelse for alle plottene. Den minkende størrelsen på de lokale ekstremalverdiene for økende dyp oppå steppet ble også observert i Trulsen *et al.* (2012) og Gramstad *et al.* (2013). Figurene viser at den lokale ekstremalverdien for kurtosen forsvinner for k_ph mellom 1,31 og 1,44 på den grunne delen av steppet. For skjevheten forsvinner ekstremalverdiene for k_ph mellom 1,44 og 1,60.

Det er også verdt å merke seg at verdien på kurtosen for plot en i første rad i figur 5.7 er minkende mot verdier ganske mye lavere enn tre i forkant og på den oppadgående skråningen av steppet, før den øker mot det lokale maksimumet. I tillegg ser vi at verdien for kurtosen ser ut til å gjøre et lite hopp mellom plot to og tre i tredje rad.

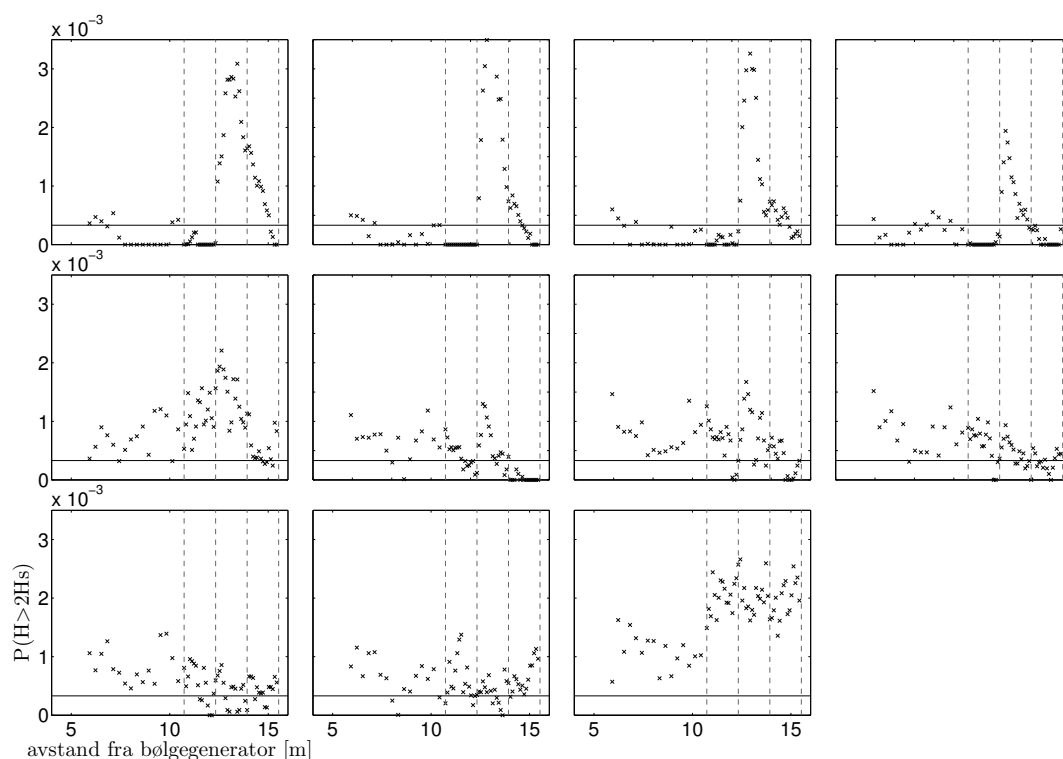
Resultatene for beregningen av freakbølgesannsynligheten $P(H > 2H_s)$ vises i figur 5.8. Freakbølgesannsynligheten er, fra et av de klassiske kriteriene for freake bølger, sannsynligheten for at bølgehøyden er større enn to ganger den signifikante bølgehøyden.



Figur 5.6: Skjevhet for alle tidsserier sortert etter stigende $k_p h$ på den grunne delen av steppet. Vertikale stiplede linjer angir posisjonen til steppet.



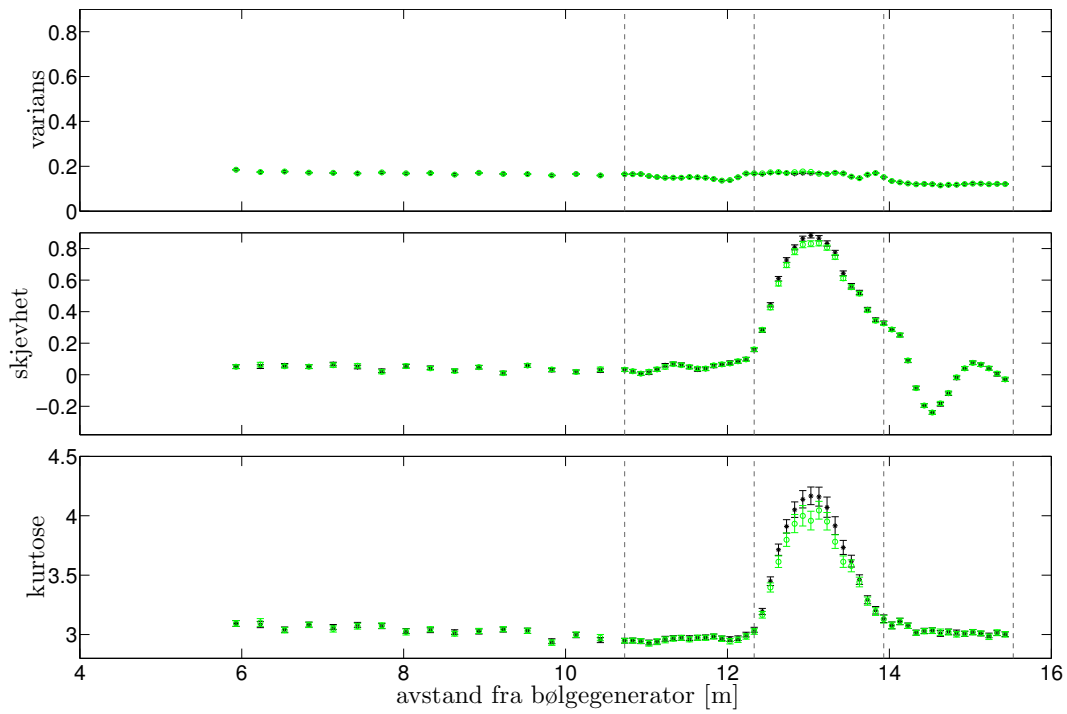
Figur 5.7: Kurtose for alle tidsserier sortert etter stigende $k_p h$ på den grunne delen av steppet. Vertikale stiplede linjer angir posisjonen til steppet.



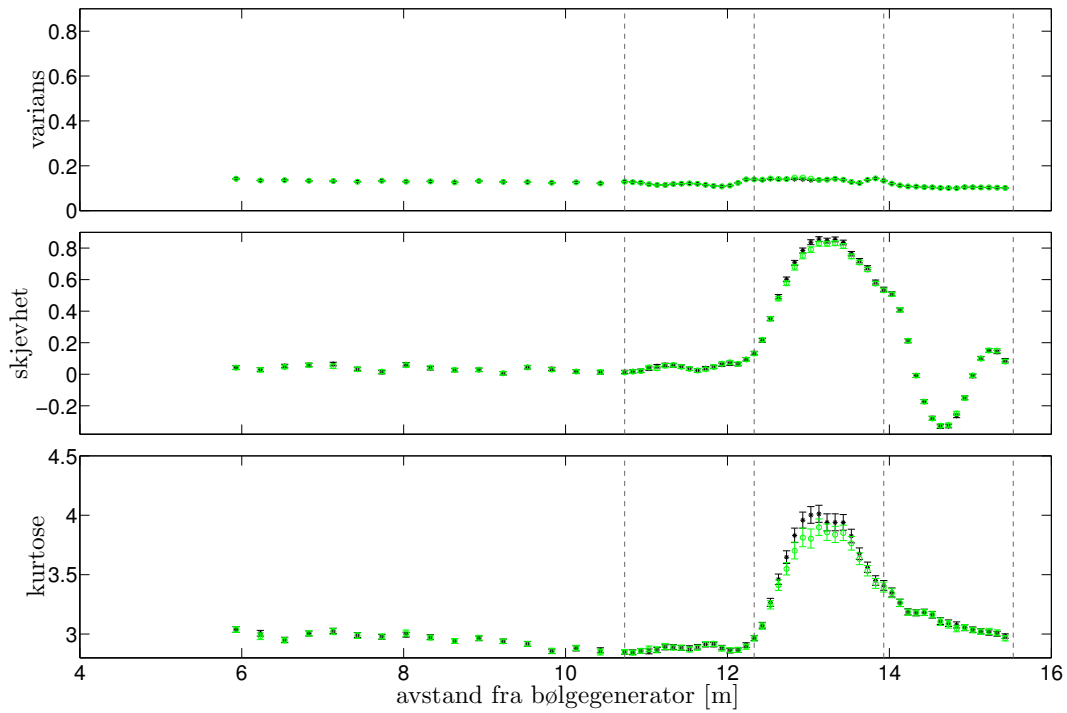
Figur 5.8: $P(H > 2H_s)$ for alle tidsserier sortert etter stigende k_ph på den grunne delen av steppet. Svart heltrukken linje angir den teoretiske Rayleigh-fordelingen for bølgehøyden. Vertikale stiplede linjer angir posisjonen til steppet.

Den er beregnet ved å finne verdien overskridelsessannsynligheten for bølgehøyde har ved $H = 2H_s = 8\sigma$, der σ er standardavviket til overflatehevningen (se eksempler på overskridelsessannsynlighet i delkapittel 5.4). Bølgehøyden er funnet som avstanden mellom øvre og nedre envelope mens envelopen er beregnet fra Hilbert-transform (se ligningene (2.32) og (2.31)). Den heltrukne svarte horisontale linjen i plottene angir freakbølgesannsynligheten for den teoretiske Rayleigh-fordelingen til bølgehøyden.

I figuren 5.8 kan vi observere at freakbølgesannsynligheten ligger for det meste over den teoretiske Rayleigh-fordelingen for alle tidsseriene. Videre ser vi at freakbølgesannsynligheten er null for noen prober. Ved disse posisjonene har ikke bølgefeltet bølger med bølgehøyde større enn $2H_s = 8\sigma$. Dette kan også observeres i resultatene for overskridelsessannsynlighet i delkapittel 5.4. På tross av dette kan vi observere et lokalt maksimum for freakbølgesannsynlighet der den grunne delen av steppet starter. Dette maksimumet minker med økende dyp over steppet, noe som stemmer overens med resultatene i figur 6, 7 og 8 i Gramstad *et al.* (2013). Det er litt vanskelig å se når dette maksimumet forsvinner, men det ser ut til at det forsvinner en plass mellom $k_ph = 1,20$ og $k_ph = 1,44$ på den grunne delen av steppet. Dette er omtrent på samme plass som det lokale maksimumet for kurtose forsvinner.



Figur 5.9: Tidsserie 4: varians, skjevhet og kurtose med 95% konfidensintervall beregnet fra overflatehevning med (svart) og uten (grønn) hull. Vertikale stiplete linjer angir posisjonen til steppet.



Figur 5.10: Samme som figur 5.9 for tidsserie 5.

5.3 Bootstrap-beregninger

I det følgende presenteres resultatene av 95% konfidensintervall for punkttestimatet av varians, skjevhet og kurtose for alle tidsseriene beregnet med bootstrap-metoden (se delkapittel 2.4). Etter at vi tok vekk det første minuttet i tidsseriene på grunn av oppstartseffekter, var lengden på tidsseriene $N = 168000$ punkt. Bootstrap-metoden ble brukt ved å trekke 168000 målepunkt med tilbakelegg 168000 ganger. De vertikale stiplete linjene i alle figurene angir posisjonen til steppet.

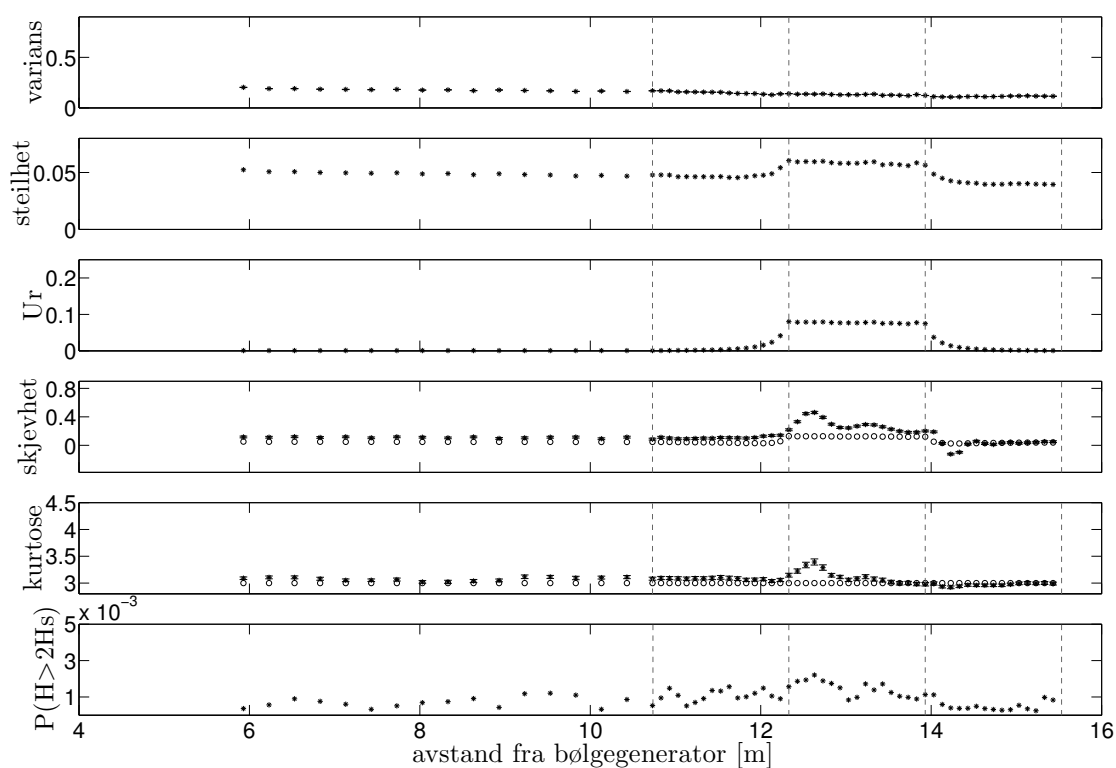
Figurene 5.9 og 5.10 viser resultatene av konfidensintervallene for varians, skjevhet og kurtose for tidsserie 4 og 5 beregnet fra de filtrerte og interpolerte tidsseriene, samt fra de filtrerte, men ikke interpolerte tidsseriene (tidsserier med hull) (se figurene 4.10 og 4.11). Vi kan tydelig se at tidsseriene med hull underestimerer det lokale maksimumet til skjevheten og kurtosen. I utgangspunktet var vår intuisjon at det var det samme om vi brukte interpolerte eller ikke interpolerte tidsserier i bootstrap-beregningene. Bakgrunnen for dette var at vi tenkte at det var de ekstreme verdiene som gav utslag på kurtosen og skjevheten, det vil si verdiene til toppene og bunnene i overflatehevningen. Så lenge disse ikke falt bort ble beregningene riktig. Men som figurene 5.9 og 5.10 viser var denne intuisjonen feil. Vi valgte derfor å stole på interpoleringen i figur 4.10 og brukte dette i bootstrap-beregningene. Disse er også brukt i resultatene i delkapittel 5.2.

Variansen, steilheten, Ursell-parameteren, skjevheten, kurtosen og freakbølgesannsynligheten for hver av tidsseriene vises i figurene 5.11–5.21. Resultatene for steilheten, Ursell-parameteren og freakbølgesannsynligheten er identiske med de i delkapittel 5.2. Da variansen er den eneste parameteren som har dimensjon, blir det litt feil å ha den med i disse plottene. Men for å samle alle beregninger som er utført på hver tidsserie har jeg likevel valgt å ha den med. I plottene for skjevheten og kurtosen er den analytiske løsningen fra delkapittel 3.2.11 plottet inn som sirkler. I den analytiske løsningen har jeg valgt å sette $k_c = k_p$ og $\omega_c = \omega_p$ for alle tidsseriene.

De lokale maksimumene og minimumene med den etterfølgende bølgebevegelsen for skjevheten, samt de lokale maksimumene for kurtosen i figurene 5.6 og 5.7 gjenkjennes også i resultatene fra bootstrap-beregningene. Resultatene fra bootstrap-beregningene viser videre at ekstremalverdiene forsvinner ved samme $k_p h$ som for punkttestimatene.

De analytiske løsningene for skjevhet og kurtose viser en del avvik fra de eksperimentelle resultatene. I figurene 5.11–5.15 og 5.17–5.21 kan vi for eksempel observere at den analytiske løsningen underestimerer de lokale maksimumsverdiene for skjevheten og kurtosen. Når det gjelder de analytiske løsningene på den oppadgående og den nedadgående skråningen er ikke disse helt pålitelig. Grunnen til dette er at det ikke er tatt hensyn til et «shoaling»-ledd i utledningen av den analytiske løsningen. Et «shoaling»-ledd er et ledd som tar høyde for stigningstallet til en skråning. Dette leddet kommer inn i det kinematiske bunnkravet i en pertubasjonsanalysen. I pertubasjonsanalysen i delkapittel 3.2 har vi antatt konstant dyp, dermed har vi sett bort fra dette leddet. I Zeng & Trulsen (2012) kan vi gjenkjenne «shoaling»-leddet som den rom-deriverte av kh i ligning (7).

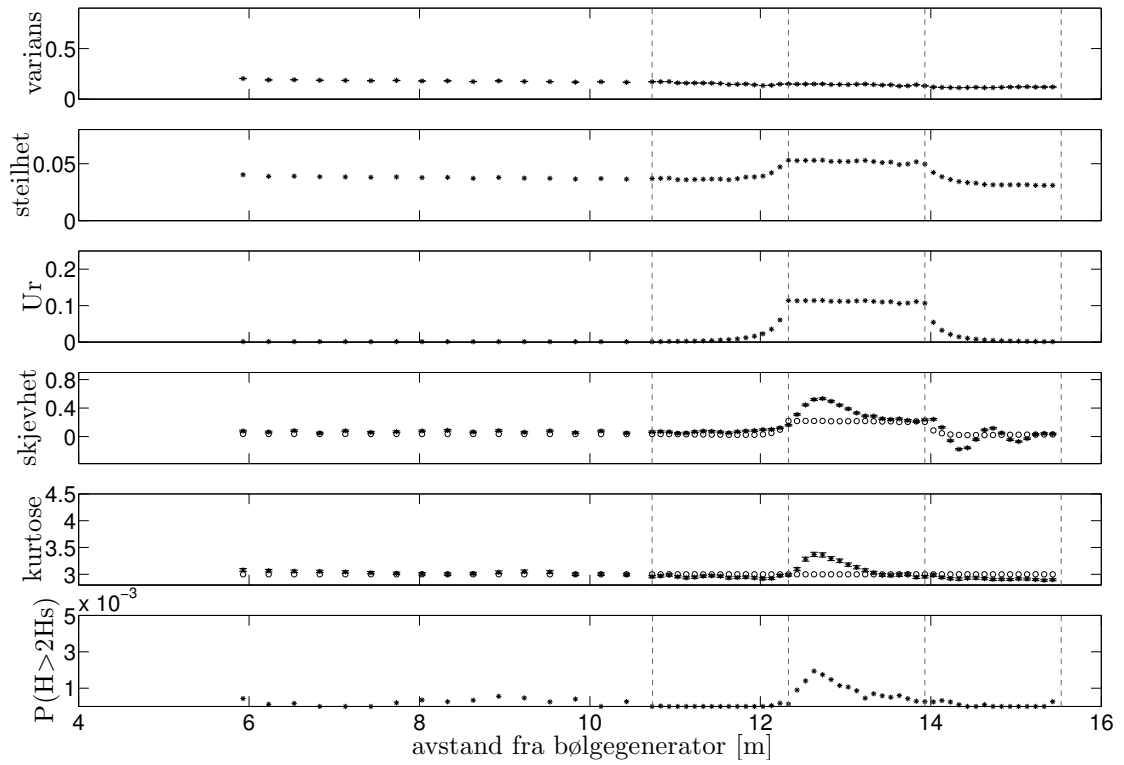
Videre ser vi at den analytiske løsningen i figur 5.16 underestimerer verdiene for skjevheten og kurtosen langs hele tanken. Det er også verdt å legge merke til at det er god overensstemmelse mellom de analytiske løsningene og de eksperimentelle løsningene for skjevhet og kurtose i forkant av steppet i figurene 5.11–5.14. Det samme gjelder for skjevheten i figur 5.15, men ikke for kurtosen. Denne figuren viser resultatene for det grunneste vannet



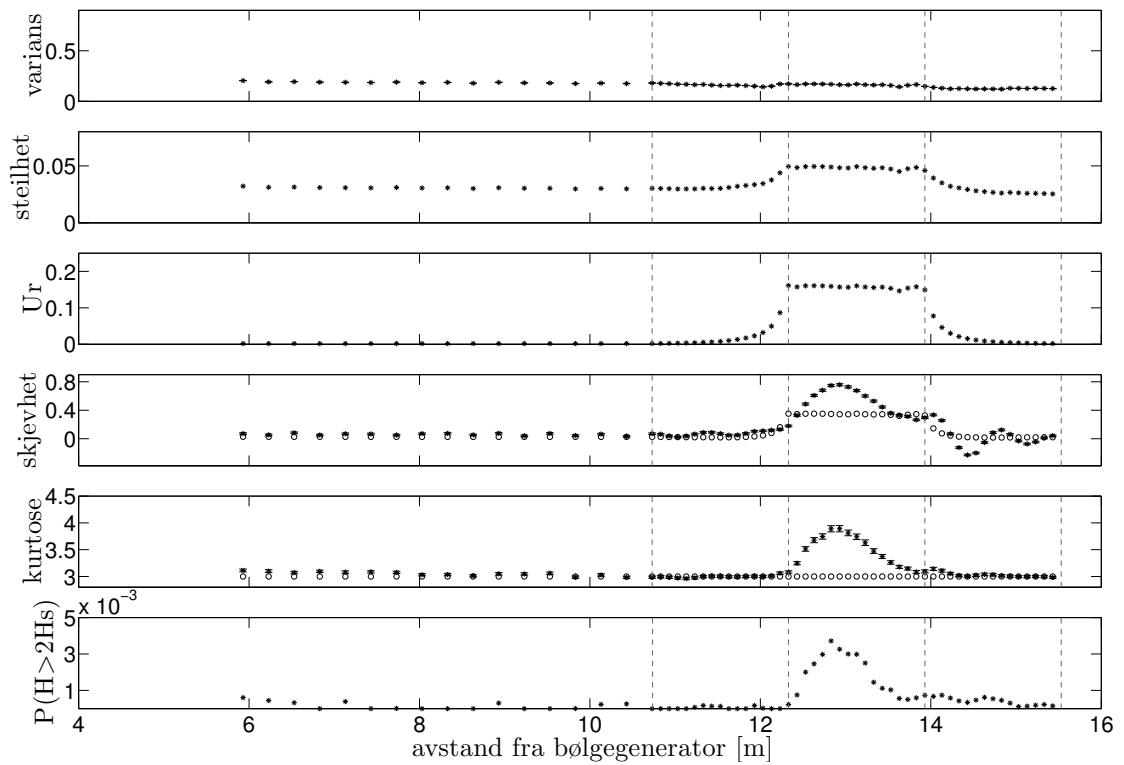
Figur 5.11: Tidsserie 1: varians, skjevhet og kurtose med 95% konfidensintervall, steilhet, Ursell-parameteren og frekbølgesannsynlighet. Sirkler angir analytisk skjevhet og horisontal heltrukken svart linje angir analytisk kurtose, begge til andre orden. Vertikale stiplete linjer angir posisjonen til steppet.

vi har kjørt eksperiment på. Den analytiske løsningen for kurtosen overestimerer her den eksperimentelle løsningen like før steppet starter.

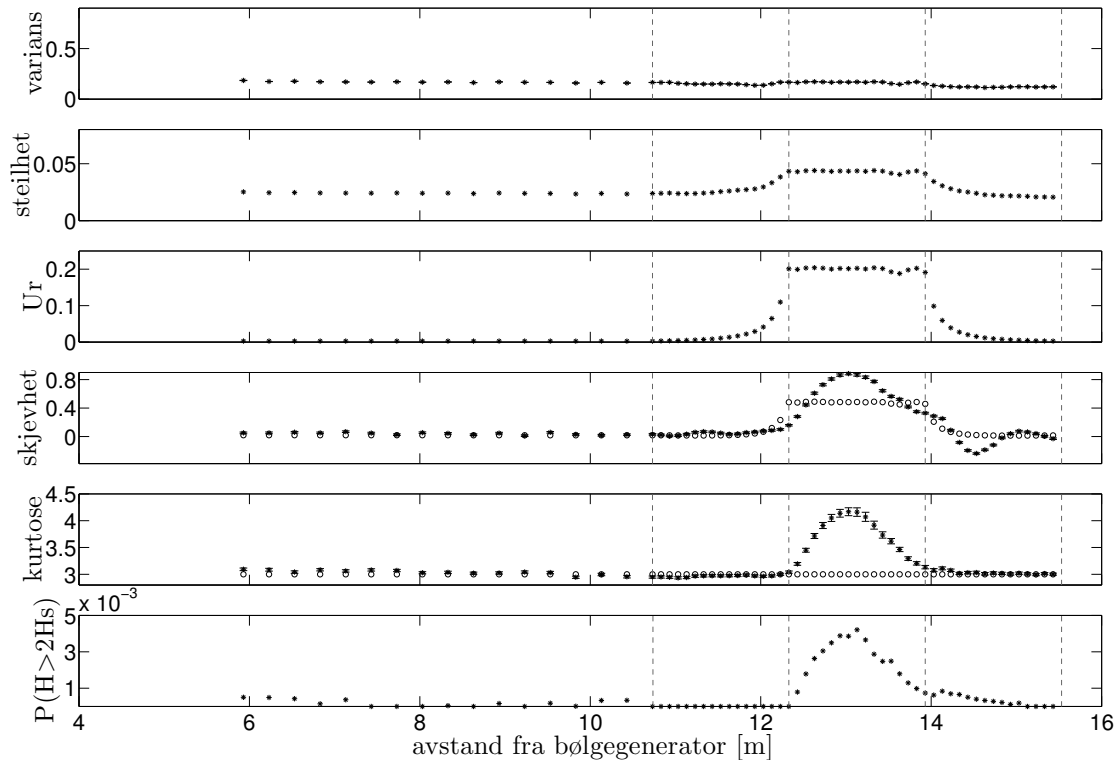
Tabellene B.1, B.2 og B.3 viser maksimum og minimum bredde for konfidensintervallene for de fire ulike posisjonene for alle tidsseriene. Her ser vi at maksimum bredde for konfidensintervallet til kurtosen er omtrent 0,17. Det er godt under det vi designet eksperimentene til å ha.



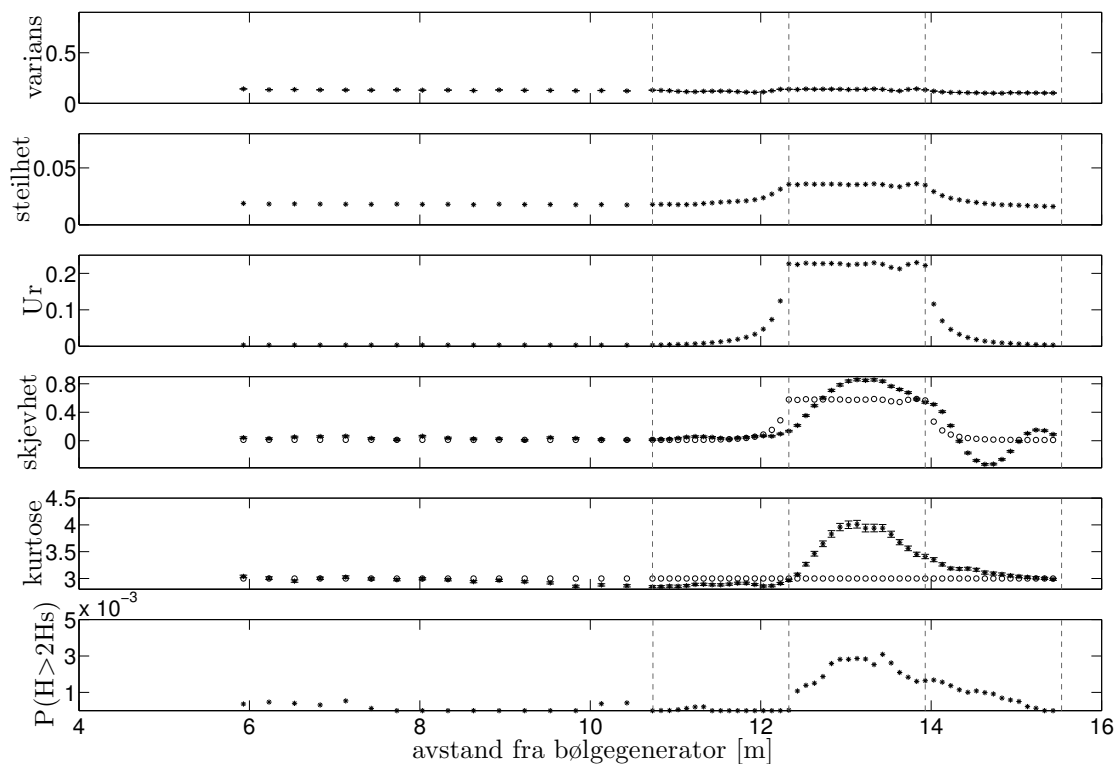
Figur 5.12: Samme som figur 5.11 for tidsserie 2.



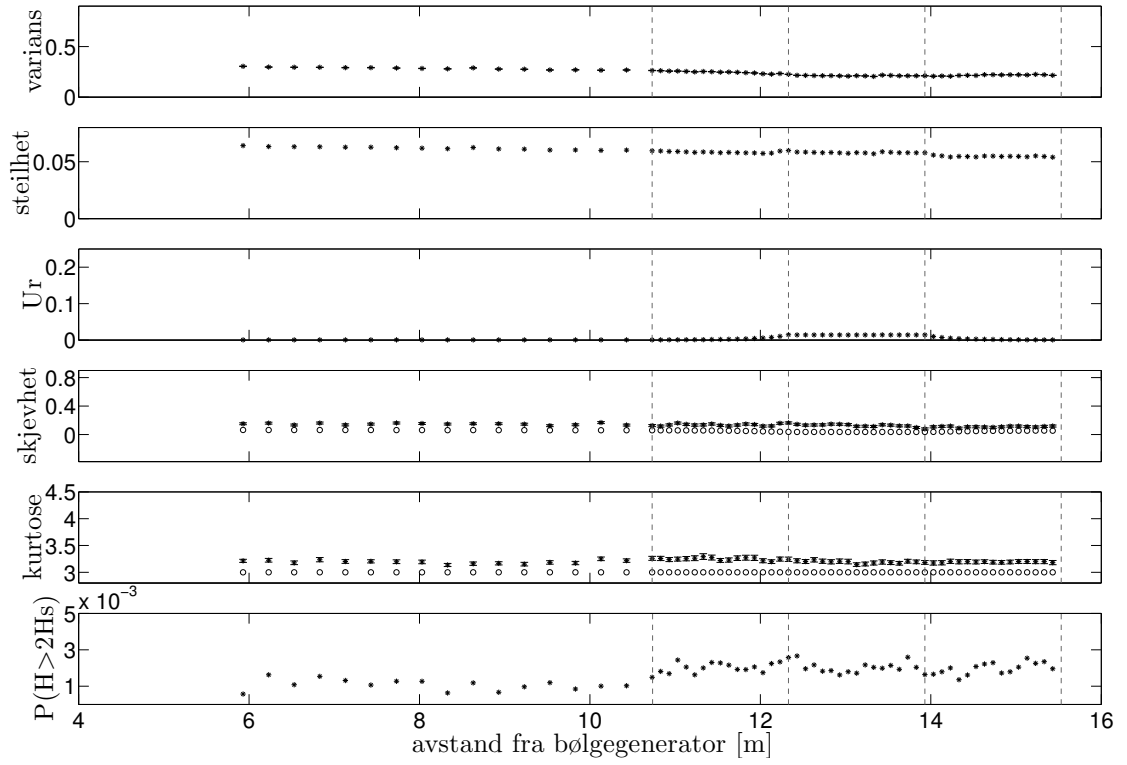
Figur 5.13: Samme som figur 5.11 for tidsserie 3.



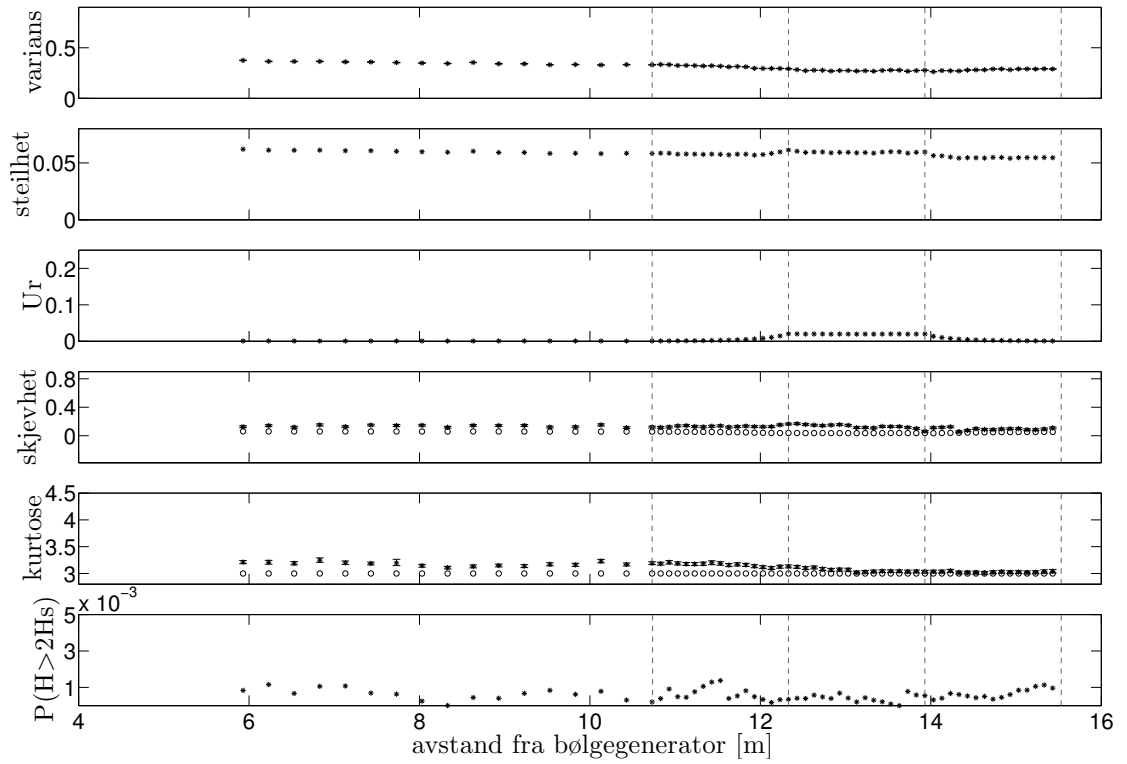
Figur 5.14: Samme som figur 5.11 for tidsserie 4.



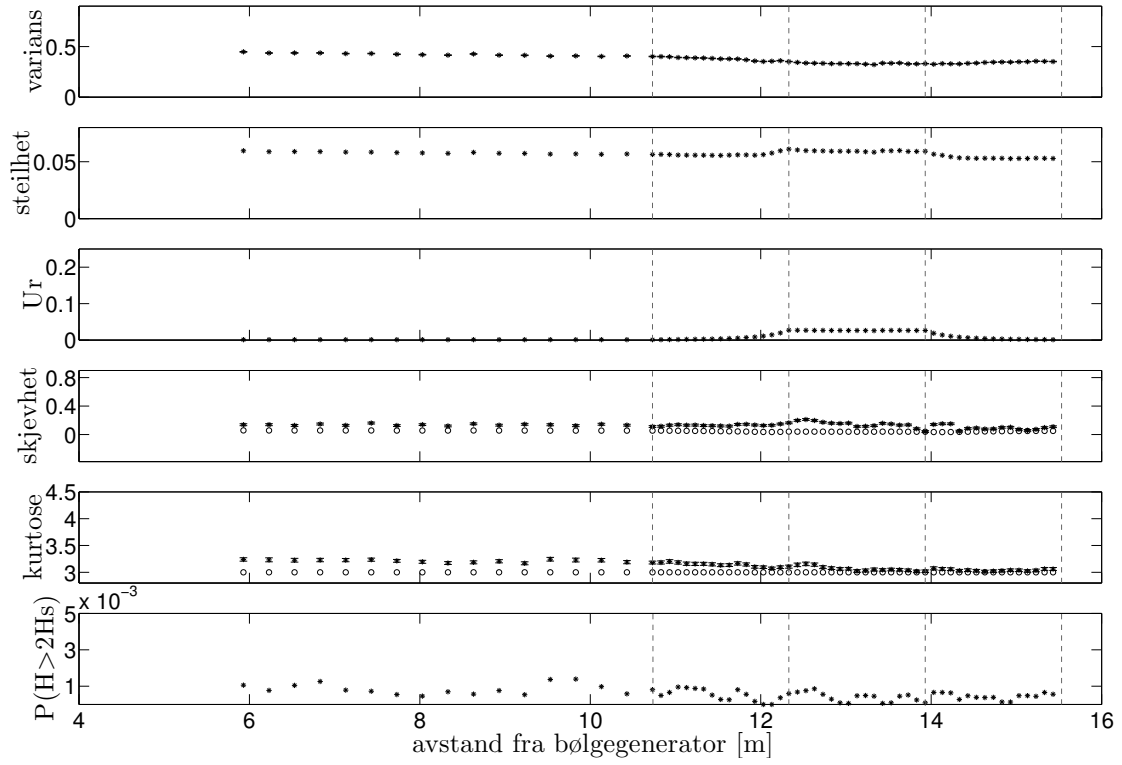
Figur 5.15: Samme som figur 5.11 for tidsserie 5.



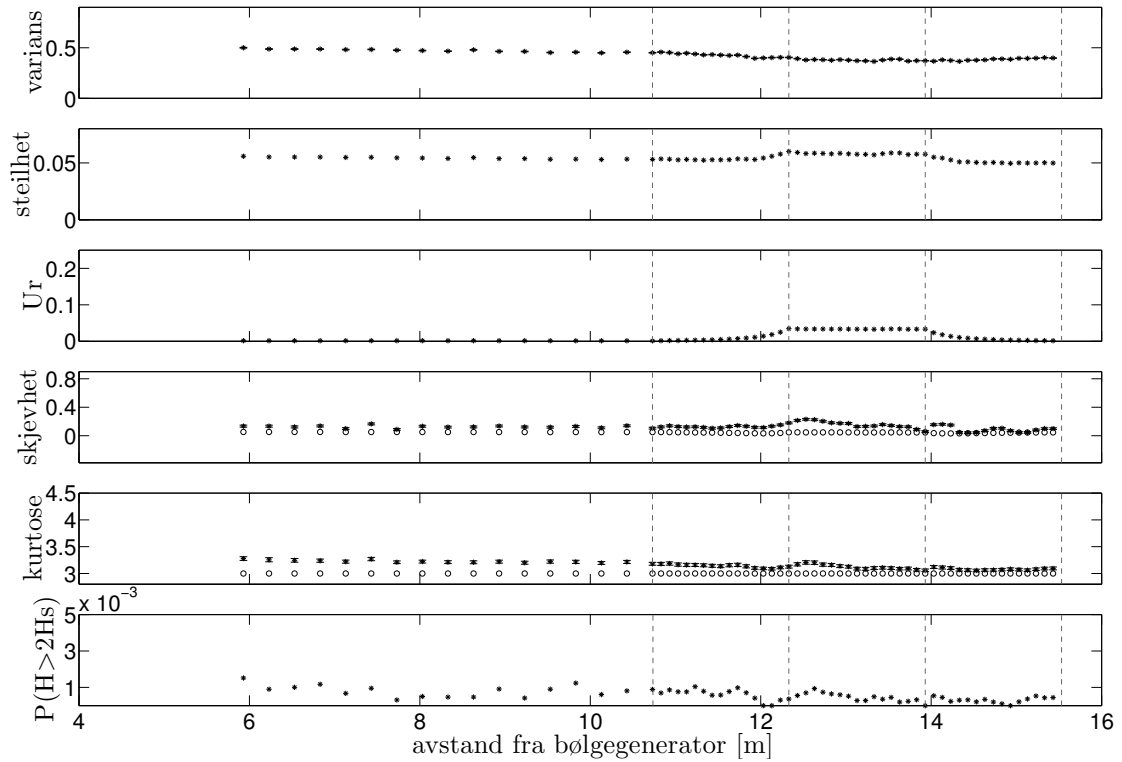
Figur 5.16: Samme som figur 5.11 for tidsserie 6.



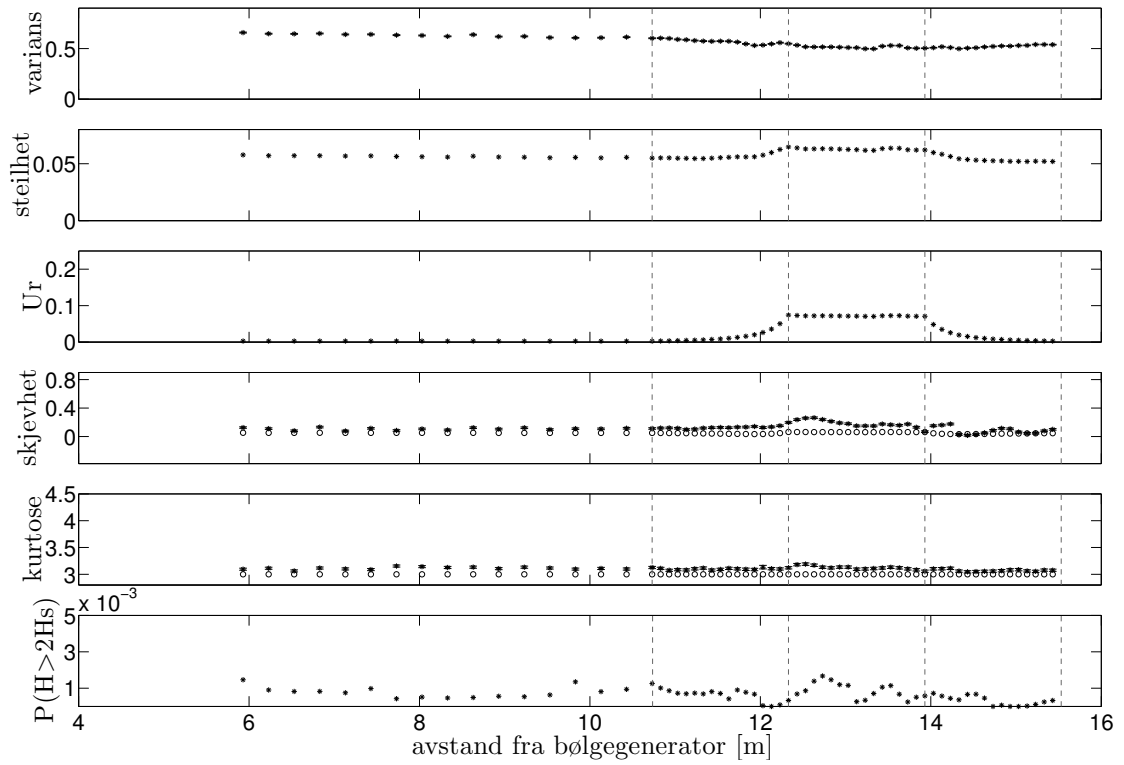
Figur 5.17: Samme som figur 5.11 for tidsserie 7.



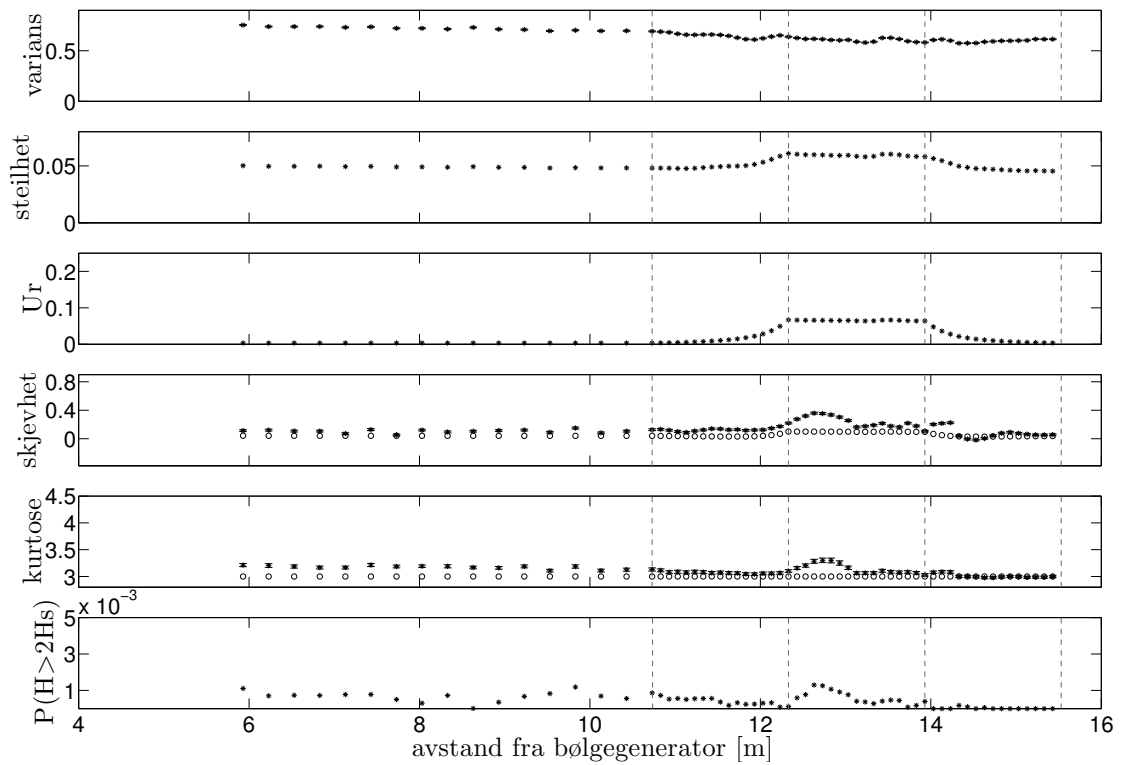
Figur 5.18: Samme som figur 5.11 for tidsserie 8.



Figur 5.19: Samme som figur 5.11 for tidsserie 9.



Figur 5.20: Samme som figur 5.11 for tidsserie 10.



Figur 5.21: Samme som figur 5.11 for tidsserie 11.

5.4 Overskridelsessannsynlighet

Under følger resultatene av beregningene av overskridelsessannsynlighet for bølgehøyden til overflatehevningen (se delkapittel 2.5) ved noen utvalgte posisjoner i tanken. Den teoretiske overskridelsessannsynligheten fra Rayleigh-fordelingen er plottet inn som referanse (den smaleste kurven i alle plottene).

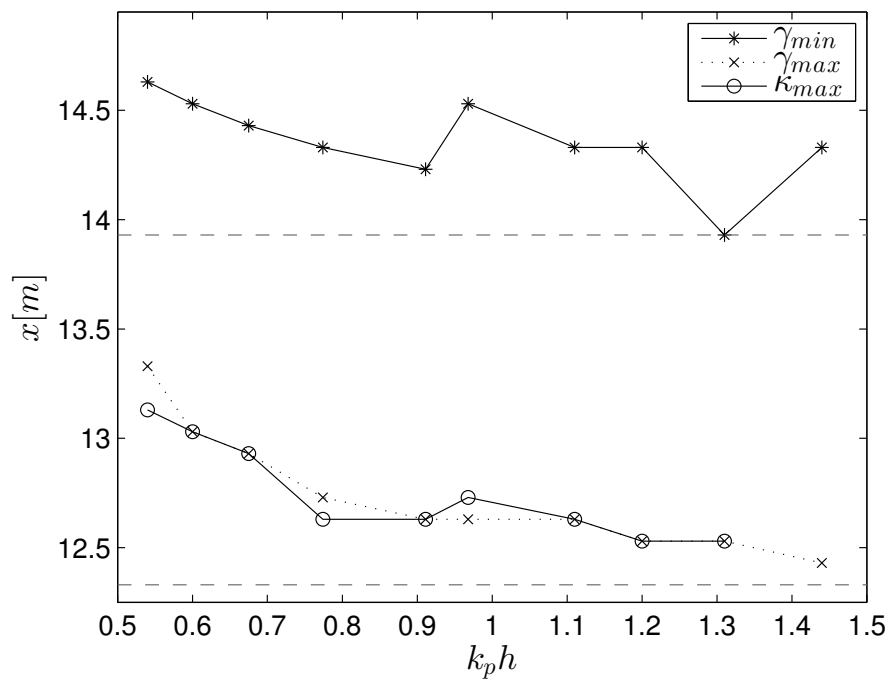
Figur 5.22 viser posisjonene i tanken i forhold til bølgegeneratoren til de lokale maksimums- og minimumsverdiene for skjevhet fra figur 5.6, γ_{max} og γ_{min} , samt posisjonene i forhold til bølgegeneratoren til den lokale maksimumsverdien for kurtose κ_{max} i figur 5.7. Disse verdiene er plottet mot k_ph på den grunne delen av steppet. De horisontale stiplete linjene angir der den grunne delen av steppet starter og slutter. Figuren viser at skjevheten og kurtosen har sine maksimum ved omtrent samme posisjon, samt at posisjonene til de lokale maksimums- og minimumsverdiene viser en tendens til å bevege seg nærmere bølgegeneratoren ved økt k_ph .

Figur 5.23 viser avstanden fra maksimumsverdien for skjevhet og kurtose til der den grunne delen av steppet starter normalisert med bølgelengden plottet mot k_ph på den grunne delen av steppet. Maksimumsverdien for skjevhet for $k_ph = 1,44$ er ikke tatt med i denne figuren da kurtosen «mister» sin maksimumsverdi tidligere enn skjevheten. Vi gjenkjenner lett skillet mellom de to ulike dypene vi har brukt i eksperimentene. Igjen ser vi at maksimumsverdiene for kurtose og skjevhet er ved omtrent samme posisjon i bølgetanken.

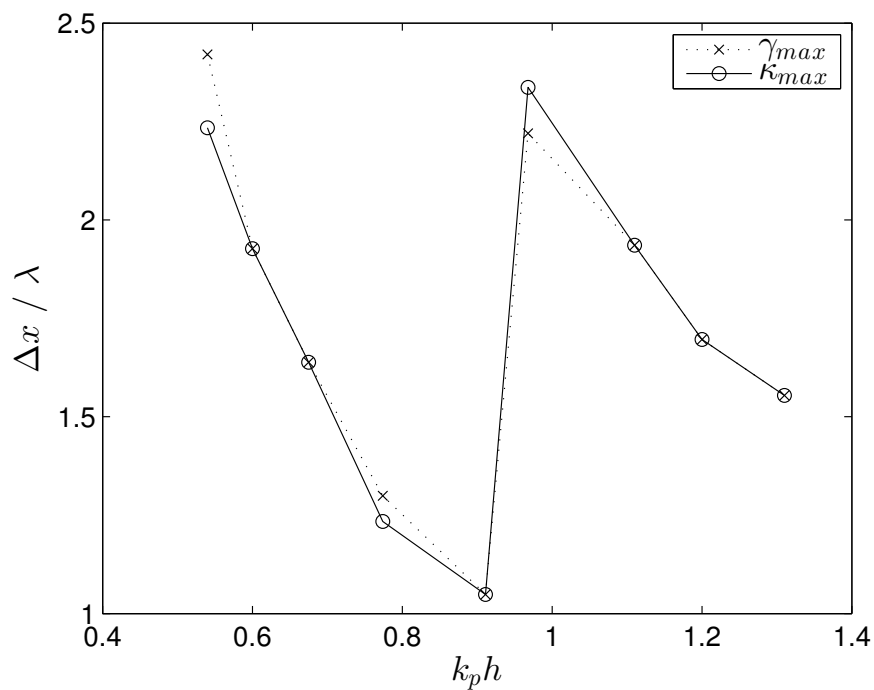
Overskridelsessannsynligheten i figur 9 i Trulsen *et al.* (2012) viser at overskridelsessannsynligheten har lokale maksimum ved de posisjonene der kurtosen og skjevheten har sine maksimum. Med bakgrunn i dette valgte vi å utføre beregninger for overskridelsessannsynlighet ved posisjonene til γ_{max} og γ_{min} . Da kurtosen og skjevheten har sine maksimum ved omtrent samme posisjon gjorde vi ikke beregninger for overskridelsessannsynlighet ved posisjonene til κ_{max} (se figur 5.22). Resultatene vises i figurene 5.24 og 5.25. Hver underfigur viser overskridelsessannsynligheten for bølgehøyde for posisjonen til γ_{max} til venstre og γ_{min} til høyre. Figurene er sortert etter stigende nummer på tidsseriene i tabell 5.2. Da de lokale maksimumene for skjevheten har blitt borte for tidsserie 6 er overskridelsessannsynligheten for disse tidsseriene ikke plottet.

Resultatene viser at det for tidsseriene 1–5 samt 9 og 11 er høyere overskridelsessannsynlighet ved posisjonene til γ_{max} sammenlignet med γ_{min} . For tidsserie 7 og 10 ser det ut til at det er omtrent samme overskridelsessannsynlighet ved de to posisjonene, mens for tidsserie 8 er overskridelsessannsynligheten lavere ved posisjonen til γ_{max} sammenlignet med γ_{min} .

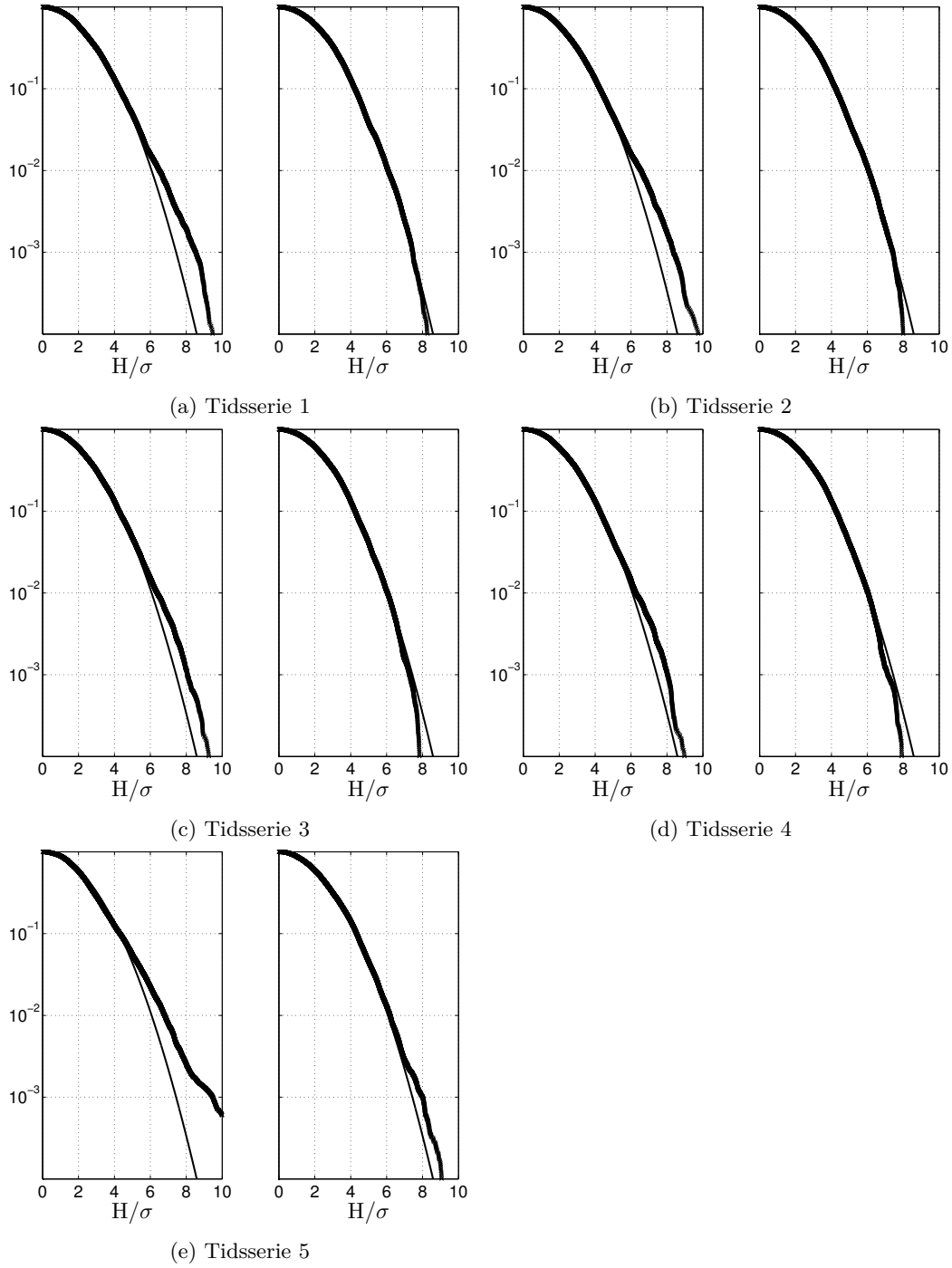
Overskridelsessannsynligheten for posisjonene til γ_{max} for tidsseriene 1–4 og 9 viser at det er flere store bølger i bølgefeltene ved posisjonene til γ_{max} enn den teoretiske Rayleigh-fordelingen tilsier. Overskridelsessannsynligheten for posisjonene til γ_{min} for de samme tidsseriene viser på den annen side at det er færre store bølger i bølgefeltene enn det Rayleigh tilsier. Overskridelsessannsynligheten for tidsserie 5 viser at det er flere store bølger i bølgefeltet ved posisjonen til både γ_{max} og γ_{min} . For tidsseriene 7, 8 og 10 viser resultatene at det er færre store bølger i bølgefeltene ved posisjonene til både γ_{max} og γ_{min} enn det Rayleigh-fordelingen tilsier. For tidsserie 11 er det omtrent like mange store bølger i bølgefeltet som det Rayleigh-fordelingen tilsier ved posisjonen til γ_{max} , mens det er færre ved posisjonen til γ_{min} .



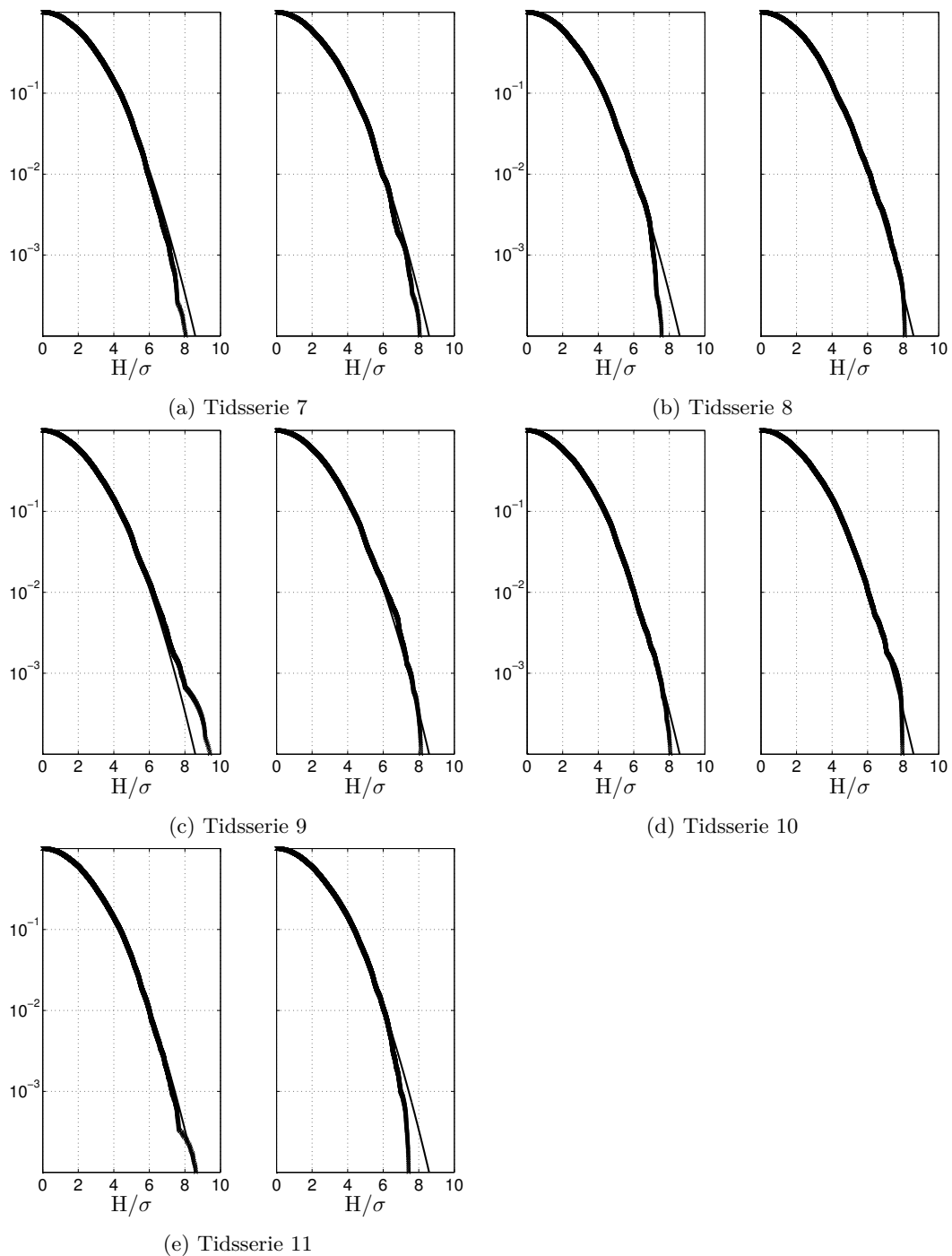
Figur 5.22: x -verdi (avstand fra bølgegenerator) for posisjonene til γ_{max} , γ_{min} og κ_{max} . Horisontale stiplete linjer angir posisjonen til steppet.



Figur 5.23: Avstanden normalisert med bølgelengden fra posisjonene γ_{max} og κ_{max} til der grunn del av steppet starter.



Figur 5.24: Overskridelsessannsynlighet for bølgehøyde for posisjonene til γ_{max} (venstre) og γ_{min} (høyre) for tidsserie 1–5. Den smaleste kurven er den teoretiske Rayleigh-fordelingen.



Figur 5.25: Overskridelsessannsynlighet for bølgehøyde for posisjonene til γ_{max} (venstre) og γ_{min} (høyre) for tidsserie 7–11. Den smaleste kurven er den teoretiske Rayleigh-fordelingen.

Kapittel 6

Diskusjon

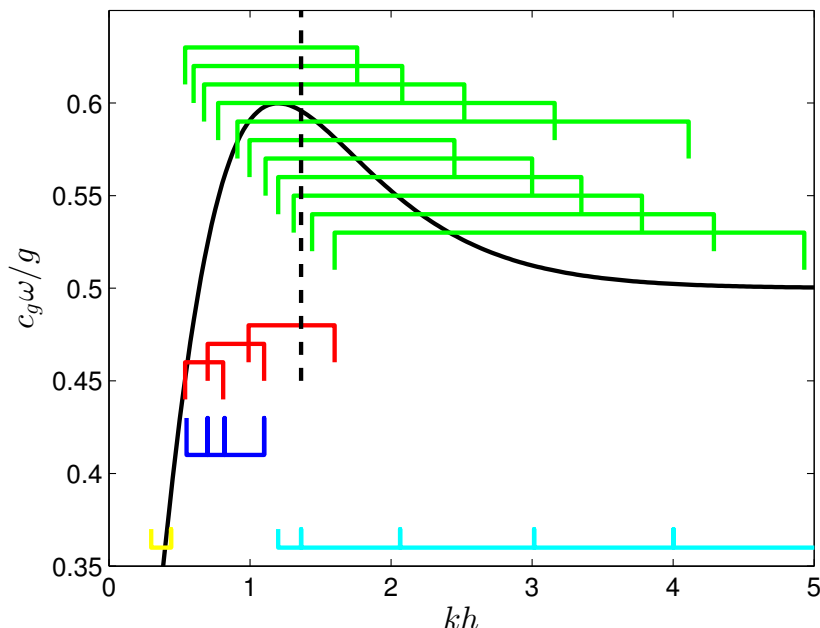
I det følgende diskuteres de eksperimentelle resultatene presentert i kapittel 5. Kapitlet er inndelt på samme måte som kapittel 5 med unntak av det siste delkapitlet. Først går vi inn på hvordan tidsseriene vi har brukt i denne avhandlingen står i sammenheng med tidligere arbeider og hvorvidt disse kan sammenlignes. Videre diskuterer vi resultatene for punktestimatene, konfindesintervallene og overskridelsessannsynlighetene. Det siste delkapitlet går inn på forskjellige arbeider som vil være en videreføring av arbeidet og resultatene i denne avhandlingen.

6.1 Oversikt over alle tidsserier

Figur 6.1 er en modifisering av figur 1.1. De ulike tidsseriene vi har gjort eksperiment på i denne avhandlingen er plottet inn i grønt. Målet med denne avhandlingen var å gjøre eksperimenter som kunne si noe om transaksjonen mellom dypt og grunt vann for langkammede bølger som propagerer over et skrånende step. Dersom man ser litt nærmere på figur 1.1 og 6.1 vil man observere at de numeriske og eksperimentelle resultatene fra Trulsen *et al.* (2012) og Gramstad *et al.* (2013) overlapper med resultatene fra Zeng & Trulsen (2012). Vi kan likevel ikke trekke en konklusjon om at Boussinesq-ligningen brukt i Gramstad *et al.* (2013) og Schrödinger-ligningen brukt i Zeng & Trulsen (2012) overlapper ved transisjonen mellom grunt og dypt vann. Grunnen til dette er at man må ta hensyn til flere parametre enn kh når man betrakter resultatene. Steilheten, eller eventuelt Ursell-parameteren, til bølgene som propagerer over den variable bunnen samt lengden på det skrånende steppet har også en effekt på resultatene.

I Zeng & Trulsen (2012) ble det brukt en skråning av en slik dimensjon at det trengs en enorm bølgetank for å gjøre sammenlignbare eksperimenter i et laboratorium. Grunnen til dette var at forfatterne ønsket at bølgefeltet skulle være i likevekt over hele skråningen. I tillegg var den ikke-lineære Schrödinger-ligningen som ble brukt utledet med hensikt om at den skulle være så enkel som overhodet mulig. Dette medførte at løsningen kun var gyldig for en langsomt varierende bunn med $\frac{\partial h}{\partial x} = \mathcal{O}(\epsilon^2)$ (Djordjević & Redekopp, 1978). Topografien i Trulsen *et al.* (2012) og Gramstad *et al.* (2013) har $\frac{\partial h}{\partial x} = \mathcal{O}(\epsilon)$. Dette resulterer i at resultatene fra Trulsen *et al.* (2012), Gramstad *et al.* (2013) og Zeng & Trulsen (2012) ikke er sammenlignbare.

I Liu & Dingemans (1989) er det utledet en ikke-lineær Schrödinger-ligning for lik bratthet



Figur 6.1: Gruppehastighet som funksjon av kh (—), dybden $kh = 1,363$ (— —). Trulsen *et al.* (2012): «case 1», «case 2» og «case 3» rød heltrukken linje (—). Gramstad *et al.* (2013): simuleringer blå heltrukken linje (—) i tillegg til nevnte tre «case». Zeng & Trulsen (2012): bølgene kommer fra dyp $kh = 10$ som ikke er vist i denne figuren, grunn del vist med cyan heltrukken linje (—). Sergeeva *et al.* (2011), gul heltrukken linje (—). Grønn heltrukken linje (—) viser eksperimentene utført i denne oppgaven.

på topografien som i Trulsen *et al.* (2012) og Gramstad *et al.* (2013). Etter det vi har oversikt over er det kun disse to ikke-lineære Schrödinger-ligningene som er utledet for variabel bunn. Bunnen som er brukt i eksperimentene tilknyttet denne avhandlingen er veldig hurtig varierende med $\frac{\partial h}{\partial x} = \mathcal{O}(\epsilon^{1/2})$. Grunnen til dette er at dimensjonen på bølgetanken i Hydrodynamisk Laboratorium legger begrensninger på hvor stort step vi kan bruke. Dette betyr at det ikke kan utføres eksperimenter med tilsvarende step som i Trulsen *et al.* (2012), Gramstad *et al.* (2013) og Zeng & Trulsen (2012) i Hydrodynamisk Laboratorium, samt at det enda ikke er utledet en ikke-lineær Schrödinger-ligning som gjelder for en bunn som er så bratt som den i eksperimentene tilknyttet denne avhandlingen.

Med bakgrunn i dette ser det ut til at det ikke er publisert resultater som kan direkte sammenlignes med resultatene i denne avhandlingen. Likevel, dersom vi ser figur 6.1 i sammenheng med tabell 6.1 som viser en oversikt over tilfellene som er undersøkt i tidligere arbeider, og tabellene 1.1, 1.2 og 5.1 som viser tilfellene vi har undersøkt i denne avhandlingen, kan vi se at resultatene i denne avhandlingen ser ut til å være sammenlignbare med Trulsen *et al.* (2012) og Gramstad *et al.* (2013) dersom man betrakter størrelsen på steppet i forhold til bølgelengden. Da kalibreringen for tidsseriene i denne avhandlingen ble gjort ved at bølgene akkurat ikke skulle bryte på toppen av steppet gir dette enda bedre sammenlignbarhet til resultatene fra Trulsen *et al.* (2012) og Gramstad *et al.* (2013). Grunnen til dette er at vi vet at Boussinesq-ligningen bryter sammen dersom bølgefeltet bryter. Da det ble gjort simuleringer med Boussinesq-ligningen tilsvarende alle «case» i Trulsen *et al.* (2012) kan vi antakelig konkludere med at bølgefeltene i Trulsen *et al.* (2012) ikke brøt,

arbeid	#	dyp $k_1 h_1$	grunn $k_2 h_2$	skrå lengde L/λ_1
Sergeeva <i>et al.</i> (2011)	1	0,44	0,3	2,08
”	2	0,44	0,3	4,2
”	3	0,44	0,3	8,3
Zeng & Trulsen (2012)	1	10	1,2	31,8
”	2	10	1,363	31,8
”	3	10	2,065	31,8
”	4	10	3,015	31,8
”	5	10	4,003	31,8
Trulsen <i>et al.</i> (2012)	1	1,6	0,99	2,57
”	2	1,1	0,70	1,69
”	3	0,81	0,54	1,28
Gramstad <i>et al.</i> (2013)	1/1	1,6	0,99	2,57
”	1/2	1,1	0,70	1,69
”	1/3	0,81	0,54	1,28
”	2/1	1,06	0,55	1,69
”	2/2	1,06	0,70	1,69
”	2/3	1,06	0,82	1,69
”	3/1	1,06	0,55	5,08
”	3/2	1,06	0,70	5,08
”	3/3	1,06	0,82	5,08
”	4/1	1,06	0,55	8,47
”	4/2	1,06	0,70	8,47
”	4/3	1,06	0,82	8,47

Tabell 6.1: Karakteristiske størrelser for tidligere arbeider. Indeks 1 angir dypt vann, indeks 2 angir grunt vann.

selv om vi fikk en muntlig beskjed fra MARIN om at ingen hadde stått og observert om bølgefeltene brøt da eksperimentene ble utført. Derfor viser det seg at det er resultatene fra Trulsen *et al.* (2012) og Gramstad *et al.* (2013) som gir best sammenlignbarhet med resultatene i denne avhandlingen.

6.2 Punktestimat

Resultatene fra punktestimatene for varians og steilhet for alle tidsseriene anskueliggjør en systematisk nedgang langs bølgetanken. Dette viser dissipasjonen av bølgefeltet når det propagerer bortover tanken. I tillegg observerer vi at økningen steilheten har når bølgene propagerer over den grunne delen av steppet blir lavere med økt $k_p h$. Dette kan forklares ved bevaring av energiflukstetthet (se delkapittel 2.6). Dersom vi innsetter gruppehastigheten for vilkårlig dyp (3.105) i ligningen for bevaring av energiflukstetthet (2.33) ser vi at bølger som propagerer fra dypere til grunnere vann vil oppleve en liten økning i amplituden.

Resultatene for Ursell-parameteren viser, i likhet med steilheten, at økningen den har når bølgene propagerer over den grunne delen av steppet blir lavere med økt $k_p h$. Denne økningen begrunnes også i bevaring av energiflukstetthet ved samme argument som for steilheten.

Siden bølgefeltene i denne avhandlingen ikke er i likevekt når bølgene propagerer over steppet vet vi, fra tidligere forskning, at det utvikles lokale maksimum for skjevhet og kurtose ved den grunne delen av steppet samt lokale minimum for skjevhet på den nedadgående skråningen. Resultatene fra punkttestimatene for skjevhet og kurtose viser nettopp dette. I tillegg viser resultatene at skjevheten får en bølgebevegelse i etterkant av det lokale minimumet ved den nedadgående skråningen. Dette er ikke observert tidligere.

Videre ser vi at de lokale maksimumsverdiene for kurtosen forsvinner helt for $k_ph = 1,44$ på den grunne delen av steppet, mens for skjevheten forsvinner de for $k_ph = 1,60$. Vi har dermed funnet at transisjonen mellom de to regimene vi diskuterte i innledningen, for dimensjonen på steppet og steilheten bølgene i denne avhandlingen har hatt, er gitt ved k_ph mellom 1,44 og 1,60. Som nevnt over er resultatene i denne avhandlingen sammenlignbare med resultatene fra Trulsen *et al.* (2012) og Gramstad *et al.* (2013). Dermed ser det dessverre ut til at begge disse artiklene har gått glipp av den kh der denne transisjonen skjer.

Punkttestimatene for skjevhet og kurtose viser videre at skjevheten er positiv for alle tidsseriene. Vi observerer også at kurtosen er høyere enn tre på toppen av steppet og varierende litt lavere, litt høyere eller akkurat tre i resten av bølgetanken for alle tidsseriene. Positiv skjevhet impliserer at fordelingen av overflatehevingen i eksperimentene heller mer mot høyre enn en normalfordeling tilsier. Dette gjør at vi antar at det er større kammer enn buker i bølgefeltene i eksperimentene sammenlignet med en Gaussisk fordelt havoverflate. Det at kurtosen er høyere enn tre gjør at vi videre kan anta at det er flere store bølger i bølgefeltene i eksperimentene på toppen av steppet enn det en normalfordelt havoverflate har. Dersom den er mindre enn tre har vi det motsatte tilfellet, da antas det å være færre store bølger i bølgefeltet sammenlignet med en Gaussisk havoverflate.

Resultatene for punkttestimatene for kurtose viser også at verdien på kurtosen for plot en i første rad i figur 5.7 er minkende mot verdier ganske mye lavere enn tre i forkant og på den oppadgående skråningen, før den øker mot det lokale maksimumet. Det er veldig overraskende at kurtosen her er såpass mye mindre enn tre og vi finner ingen mulig forklaring på dette i Janssen (2009) og Janssen & Onorato (2007). Fra Peelinovsky & Sergeeva (2006) er vi klar over at kurtosen oppnår et minimum når man beveger oss inn på grunnere vann, men at det da er snakk om såpass grunt vann at heller ikke det kan forklare denne oppførselen.

Resultatene for freakbølgesannsynlighet viser at freakbølgesannsynligheten er null for noen av posisjonene i mange av tidsseriene. Ved disse posisjonene ble det rett og slett ikke observert noen freake bølger. Grunnen til dette er uklar, men en mulig årsak kan være at siden eksperimentene ble designet for å få smale nok konfidensintervall for kurtosen, samt at avviket fra Rayleigh-fordelingen for overskridelsessannsynligheten skulle være ved samme sannsynlighetsnivå som resultatene i Trulsen *et al.* (2012), er tidsseriene muligens for korte til å kunne si noe signifikant om freakbølgesannsynligheten. Dersom man ønsket å si noe signifikant om denne trengs det egentlig veldig lange tidsserier. På tross av dette viser resultatene at freakbølgesannsynligheten har et lokalt maksimum der den grunne delen av steppet starter. Dette maksimumet minker med økende dyp over steppet og forsvinner en plass mellom $k_ph = 1,20$ og $k_ph = 1,44$ på den grunne delen av steppet.

Da kutose og skjevhet gir oss indikasjoner på sannsynligheten for freake bølger, kan ikke disse parameterne si oss noe direkte om den reelle sannsynligheten for freake bølger i bølgefeltet. Det er dette freakbølgesannsynligheten og overskridelsessannsynligheten sier oss noe om. I utgangspunktet er det ingen direkte sammenheng mellom parameterne skjevhet og

kurtose og freakbølgesannsynlighet og overskridelsessannsynlighet. Disse kan dermed ikke underbygge hverandre. Det er likevel verdt å merke seg at freakbølgesannsynligheten og kurtosen har omtrent samme oppførsel i figurene 6, 7 og 8 i Trulsen *et al.* (2012), samt at det ser ut til at den lokale maksimumsveriden for de to parameterne forsvinner for omtrent samme dyp i resultatene i denne avhandlingen.

6.3 Bootstrap-beregninger

Bootstrap-beregningene for varians, skjevhet og kurtose har gitt smale konfidensintervall og vi kan anta at resultatene vi har funnet sier noe signifikant om disse parameterne for den gitte havtilstanden som de ulike tidsseriene representerer. I likhet med resultatene for punkttestimatene for skjevhet og kurtose viser resultatene for skjevhet og kurtose beregnet fra bootstrap-metoden at det utvikles et lokalt maksimum for begge parametere ved den grunne delen av steppet. I tillegg kan man observere at skjevheten får et lokalt minimum med en etterfølgende bølgebevegelse på den nedadgående skråningen. Ekstremalverdiene forsvinner ved de samme dypene som resultatene for punkttestimatene viser. Vi ser også at kurtosen blir mindre enn tre for tidsserie 5, noe som er kommentert over.

De analytiske løsningene for skjevhet og kurtose i figurene 5.11–5.21 viser en del avvik fra de eksperimentelle resultatene. Det er i hovedsak tre årsaker til disse avvikene. For det første tar ikke den analytiske løsningen høyde for den dynamiske utviklingen amplituden i et bølgefelt har i Schrödinger- og Boussinesq-ligningene. Denne utviklingen fører til at et bølgefelt trenger en viss distanse for å oppnå likevekt når bunnen varierer. Bølgefeltene i denne avhandlingen er dermed kun i likevekt i forkant av steppet. Den andre årsaken er nettopp det at bølgefeltet ikke er i likevekt over steppet. Den tredje årsaken er at den analytiske løsningen er beregnet ut fra en smalbåndet prosess og JONSWAP-spekteret vet vi at ikke er smalbåndet.

6.4 Overskridelsessannsynlighet

Fra kapittel 2 har vi funnet at den teoretiske bølgehøyden og kamhøyden for en ekstremt smalbåndet Gaussisk overflatehevning er Rayleigh-fordelt. I tillegg har vi at beregningen av envelopen (fra Hilbert-transform) for å finne estimatet for den empiriske bølgehøyden $H = 2A$, også forutsetter at prosessen er ekstremt smalbåndet. Videre vet vi at JONSWAP-spekteret vi har benyttet i eksperimentene er bredbåndet og at overflatehevingene ikke er Gaussisk fordelt. Dette fører til at å bruke den estimerte bølgehøyden for å finne overskridelsessannsynligheten, samt sammenligne denne med Rayleigh-fordelingen kan være problematisk. Vi antar likevel at Hilbert-envelopen gir fordelingen for «sann» bølgehøyde og kamhøyde på tross av at prosessen ikke er smalbåndet. Dette er grunnen til at vi har valgt å utføre beregningene av overskridelsessannsynlighet ved hjelp av Hilbert-transformen. Videre har vi, med bakgrunn i at overflatehevingen ikke er Gaussisk fordelt, at bølgehøyden og kamhøyden i tiddseriene vi har gjort eksperiment på ikke er Rayleigh-fordelt. Derfor kan vi også se på avviket fra Rayleigh-fordelingen som et bilde på ikke-lineariteten til bølgefeltene.

Resultatene av overskridelsessannsynligheten for de av tidsseriene som har lavere $k_p h$ på toppen av steppet viser at det er høyere overskridelsessannsynlighet ved posisjonene til

γ_{max} sammenlignet med γ_{min} . Dette underbygger resultatet fra freakbølgesannsynligheten om at det er større sannsynlighet for freake bølger der den grunne delen av steppet starter, sammenlignet med andre posisjoner over steppet. Freakbølgesannsynligheten viser i tillegg at for økt k_ph på toppen av steppet blir denne forskjellen mindre. Dette gjenspeiler seg i resultatene for overskridelsessannsynlighet da vi observerer, for tidsseriene med høyere k_ph på toppen av steppet, at det er omtrent lik overskridelsessannsynlighet for posisjonene til γ_{max} og γ_{min} .

Overskridelsessannsynlighetene viser videre at for tidsserie 8 og 11 blir bølgehøyden aldri høyere enn 8σ , som er det klassiske freakbølgekriteriet. Dette betyr at det i følge beregningen av overskridelsessannsynlighet rett og slett ikke har blitt målt freake bølger ved disse posisjonene. Det er ved disse posisjonen freakbølgesannsynligheten blir null.

Både resultatene for overskridelsessannsynligheten og kurtosen viser at tidsserie 5 skiller seg litt ut fra de andre tidsseriene. Som diskutert i forbindelse med resultatene for punkttestimatet av kurtosen er årsaken til dette er uklar, men det har kanskje en sammenheng med at vannet for denne tidsserien er det grunneste vannet vi har kjørt eksperimenter på.

6.5 Videre arbeid

I eksperimentene tilknyttet denne avhandlingen ønsket vi at resultatene var av en slik art at det var reeltivt greit å sammenligne de med en numerisk modell på et senere tidspunkt. Av den grunn ønsket vi for eksempel minst mulig brytning i tanken. En naturlig fortsettelse på arbeidet i denne avhandlingen blir dermed å utarbeide en numerisk modell som man kan sammenligne med de eksperimentelle resultatene. Denne modellen må gjelde for alle dypene vi har sett på eksperimentelt, også for transisjonen mellom dypt og grunt vann. En mulighet er dermed å implementere full løsning av Euler-ligningene for variabelt dyp.

I tillegg viser resultatene i denne avhandlingen mangelen det er på simuleringer av langkammede bølger som propagerer over plane variable bunner. Det ville for eksempel vært interessant å tilpasse den numeriske modellen i Zeng & Trulsen (2012) til å gjelde for et step tilsvarende Trulsen *et al.* (2012) eller Gramstad *et al.* (2013). I Trulsen *et al.* (2012) og Gramstad *et al.* (2013) varierer bunnen med $\frac{\partial h}{\partial x} = \mathcal{O}(\epsilon)$. Dette medfører at man kunne brukt den ikke-lineære Schrödinger-ligningen utledet i Liu & Dingemans (1989) dersom man ønsket å se på lignende tilfeller på dypere vann. Hadde vi implementert den nevnte Schrödinger-ligningen kunne vi ha prøvd å gjenkjent for hvilken k_ph Schrödinger- og Boussinesq-ligningene sluttet å virke, og undersøkt om dette hadde vært for samme k_ph som kurtosen og skjevheten ikke lenger har det lokale maksimum ved den grunne delen av steppet. For å se om vi kunne gjenkjent bølgebevegelsen skjevheten får på den nedadgående skråningen ville det også vært ønskelig å kjøre simuleringer med Boussinesq- og Schrödinger-ligninger med et step med samme dimensjoner som i denne avhandlingen. Som nevnt over er det ikke enda utviklet en ikke-lineær Schrödinger-ligning som gjelder for en bunn med bratthet lik den brukt i eksperimentene tilknyttet denne avhandlingen. Dermed måtte man utforsket de numeriske egenskapene for en passende ikke-lineær Schrödinger-ligning med et «shoaling»-ledd som er kraftigere enn i Liu & Dingemans (1989). Man burde kanskje hatt med «shoaling»-leddet for varierende bunn i det kinematisk bunnkravet allerede til ledende orden.

En annen interessant videreføring av denne avhandling hadde vært å gjort flere eksperiment med samme step for dypere vann for å se om vi kunne gjenkjent det lokale minimumet

kurtosen og skjevheten har ved den grunne delen av steppet i Zeng & Trulsen (2012). I tillegg hadde det vært ønskelig å beregne frekvensspekteret til bølgefeltene ved ulike posisjoner i tanken og undersøkt hvordan disse hadde utviklet seg når bølgefeltet propagerer over steppet. Resultatene av dette kunne blitt sammenlignet med resultatene i Trulsen *et al.* (2012).

Kapittel 7

Konklusjon

Det er kjent fra både eksperimentelle og numeriske resultater at langkammede bølgefelt som propagerer på grunt vann over en plan variabel bunn mot grunnere vann, har større sannsynlighet for freake bølger ved den grunne delen av bunnen. I tillegg er det kjent fra numeriske resultater at langkammede bølger som propagerer på dypere vann over en plan variabel bunn mot mindre dypt vann, vil ha mindre sannsynlighet for freake bølger ved den samme posisjonen. Som en naturlig videreføring av dette arbeidet ønsket vi i denne avhandlingen å utføre eksperimenter med mål om å finne transisjonen mellom de to regimene som de tidligere arbeidene hentyder at finnes. Vi har sett på svakt ikke-lineære langkammede bølger som propagerer fra dypere vann rett inn mot dybekurvene til en plan variabel bunn. Bunnen vi brukte, besto av en oppadgående skråning, deretter en horisontal del etterfulgt av nedadgående skråning. Den oppadgående og den nedadgående skråningen hadde samme stigningstall med $\frac{\partial h}{\partial x} = 0,2625$. Dypene vi har sett på, ligger mellom $k_p h = 0,54$ og $k_p h = 1,60$ på den grunne delen av dette steppet. Resultatene viste at transisjonen mellom de to regimene var ved $k_p h$ mellom 1,44 og 1,60 på den grunne delen av steppet. I tillegg har utført vi en pertubasjonsanalyse til andre orden av ikke-lineære bølger på endelig dyp, med den hensikt å finne analytiske løsninger av de statistiske parameterne. De analytiske løsningene viste en del avvik fra de eksperimentelle resultatene. En av årsakene til dette var at bølgefeltene ikke var i likevekt da de propagerte over steppet. De eksperimentelle resultatene bekreftet også tidligere funn om at sannsynligheten for freake bølger ved den grunne delen av en plan variabel bunn øker med minkende dyp. Som en anvendelse av disse resultatene forventer vi at det er større sannsynlighet for freake bølger på, eller i nærheten av kontinentalsokkelen, samt ved utkanten av fiskebanker. Resultatene viser også at det er behov for mer forskning på freake bølger over variabelt dyp, både eksperimentelt og numerisk.

Tillegg A

Eksperimentelt oppsett

A.1 Inputfiler til bølgegeneratoren

Inputfilene som sendes til bølgegeneratoren via WaveLab© er generert ved hjelp av et Matlab-program skrevet av Tore Magnus A. Taklo kalt `JonswapInput.m`. Dette programmet bruker JONSWAP-spekteret med «peak enhancement» faktor $\gamma = 3,3$ for å lage en volt-array som sendes til bølgegeneratoren. Manuelt i programmet velger man hvilken peak periode man ønsker at bølgefeltet skal, ha i tillegg til hvor mange sekunder man ønsker tidsserien skal vare.

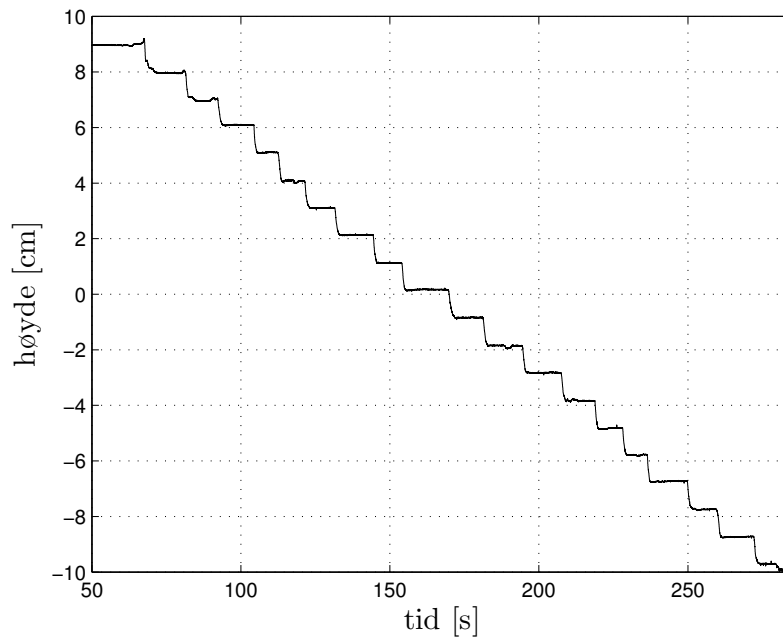
Overflatehevningen blir generert ved at programmet ganger amplituder funnet fra det normaliserte JONSWAP-spekteret med cosinus til summen av ωt og en tilfeldig fase (funnet ved rand-funksjonen i Matlab, sørger for at ikke det samme tallet blir trukket hver gang man kjører programmet ved å bruke `RandStream`). Fasen til overflatehevningen er tilfeldig fordelt mellom 0 og 2π , og ω er diskretisert med peak-verdi funnet fra peak perioden. Alle overflatehevningene blir summert. Man ender da opp med en overflatehevning som er en superposisjon av overflatehevningene tilknyttet hver amplitude i JONSWAP-spekteret slik:

$$\eta = \sum_j a_j \cos \theta_j \quad (\text{A.1})$$

Videre omregnes denne overflatehevningen til volt ved å gange med en voltamplitude. Voltamplituden kalibreres ut fra steilheten man ønsker bølgefeltet skal ha. Det tas høyde for at likevektposisjonen til bølgegeneratoren er 5,5 volt ved at overflatehevningen får den samme likevektposisjonen. For å sørge for at tidsseriene starter og slutter med bølgegeneratoren i likevektposisjon interpoleres starten og slutten av tidsserien slik at de har en verdi på 5,5 volt.

A.2 Kvalitetssikring av prober

I tillegg til kalibrering av målevinduet til probene, som er forklart i delkapittel 4.2.2, var det viktig å kvalitetssikre at probene måler overflatehevningen på riktig måte. I den forbindelse var det i hovedsak to ting det var viktig å sjekke. For det første måtte vi forsikre oss om at probene målte overflatehevningen riktig vei. Dette ble gjort ved at en av oss førte



Figur A.1: Kalibreringskurve for probe 15

hånden under alle probene, samtidig som probene gjorde målinger. Vi fikk da observert om de ga et positivt utslag på håndbevegelsen slik vi ønsket for at overflatehevningen skulle måles riktig vei. Alle probene gjorde dette.

Probene måler overflatehevningen i volt. Konverteringen mellom volt og centimeter blir gjort i programmet LabVIEW© som lagrer resultatene fra alle probene for hver tidsserie i en fil. Det andre vi måtte undersøke var dermed om denne konverteringen var riktig. Dette testet vi for et par av probene. Figur A.1 viser resultatene av testen vi kjørte for probe nummer 15. Da denne testen ble utført i forbindelse med Lisa Bæverfjord Rye sine eksperiment, var probene kalibrert til å ha et vindu på ± 10 cm. Vi flyttet probene en og en cm ned manuelt ved å bruke en linjal. Vi gjorde denne testen for to ulike prober 2 ganger. Det at resultatene i figuren ser ut til å avvike litt på hver centimeter begrunnes i at forflytningen ble gjort manuelt.

A.3 Filtre

Under følger koden for de seks ulike filterne brukt i postprosesseringen av rådataene i denne avhandlingen.

A.3.1 RemoveDropouts

```
1 function eta_out=RemoveDropouts(eta,ProbeNo,UpperThreshold, InnerThreshold)
2 % eta is a matrix with time in the first column and surface elevation data
3 % in the remaining columns.
4 % ProbeNo is the number of the probe (1-16) one wants to remove the
5 % dropouts from.
6
7 for i=1:length(eta)-1
8     % Criteria for dropouts.
9     if abs(eta(i+1,ProbeNo+1)-eta(i,ProbeNo+1))>InnerThreshold ||...
10        abs(eta(i,ProbeNo+1))>UpperThreshold ||...
11        abs(eta(i,ProbeNo+1)-eta(i+1,ProbeNo+1))>InnerThreshold
12        % Dropout data points are set to not a number (NaN).
13        eta(i,ProbeNo+1) = NaN;
14    end
15 end
16
17 eta_out=eta(:,ProbeNo+1);
18 end
```

A.3.2 InterpolateDropouts

```
1 function eta_out=InterpolateDropouts(eta,ProbeNo,UpperThreshold,...
2     InnerThreshold)
3 % eta is a matrix with time in the first column and surface elevation data
4 % in the remaining columns.
5 % ProbeNo is the number of the probe (1-16) one wants to remove the
6 % dropouts from.
7 % Interpolation method is default 'pchip'.
8
9 %InterpolationMethod
10 InterpolationMethod = 'pchip';
11 t=eta(:,1);
12
13 for i=1:length(eta)-1
14     % Criteria for dropouts.
15     if abs(eta(i+1,ProbeNo+1)-eta(i,ProbeNo+1))>InnerThreshold ||...
16        abs(eta(i,ProbeNo+1))>UpperThreshold ||...
17        abs(eta(i,ProbeNo+1)-eta(i+1,ProbeNo+1))>InnerThreshold
18        % Dropout data points are set to not a number (NaN).
19        eta(i,ProbeNo+1) = NaN;
20    end
21 end
22 eta(any(isnan(eta),2),:) = [];
23 eta_out(:,1) = interp1(eta(:,1), eta(:,ProbeNo+1), t, InterpolationMethod);
24 end
```

A.3.3 RemovePeaks

```
1 function eta_out=RemovePeaks(eta_in,Threshold)
2 % eta_in is a Nx1 vector with surface elevation data.
3 % Local peaks that are more than Threshold apart is set to NaN.
4
5 eta_out=eta_in;
6
7 npr=1; % Number of peaks removed in each pass.
8 np=0; % Total number of peaks removed.
9 counter=0; % Total number of passes.
10
11 while npr>0
12     counter=counter+1;
13
14     % Finds index for local peaks that are more than threshold apart.
15     [~,index]=findpeaks(eta_out,'threshold',Threshold);
16
17     eta_out(index)=NaN; % Puts the peaks to Not a Number.
18
19     npr=sum(index);
20
21     np=np+npr;
22
23     fprintf('Pass %2d, removed %6d peaks.\n',counter,npr)
24 end
25 fprintf('Found totally %6d peaks.\n',np)
26
27 end
```

A.3.4 InterpolatePeaks

```
1 function eta_out=InterpolatePeaks(eta_in,Threshold)
2 % eta_in is a Nx1 vector with surface elevation data.
3 % Interpolation method is default 'pchip'.
4 % Local peaks that are more than Threshold apart is set to NaN.
5
6 eta_out=eta_in;
7
8 npr=1; % Number of peaks removed in each pass.
9 np=0; % Total number of peaks removed.
10 counter=0; % Total number of passes.
11
12 while npr>0
13     counter=counter+1;
14
15     % Finds index for local peaks that are more than threshold apart
16     [~,index]=findpeaks(eta_out,'threshold',Threshold);
17
18     eta_out(index)=NaN; % Puts the peaks to Not a Number.
19
20     npr=sum(index);
21
22     np=np+npr;
23
```

```

24
25     fprintf('Pass %2d, removed %6d peaks.\n',counter,npr)
26
27     eta_out(index)=interp1(find(~isnan(eta_out)),...
28         eta_out(~isnan(eta_out)), index, 'pchip');
29 end
30 fprintf('Removed totally %6d peaks.\n',np)
31 end

```

A.3.5 RemoveSpikes

```

1  function eta_out=RemoveSpikes(eta_in,t,Threshold)
2  % eta_in is a Nx1 vector with surface elevation data,
3  % t is a Nx1 vector with the time.
4  % Threshold is the maximum slope between two datapoints.
5
6  eta_out=eta_in;
7
8  np=0; % Total number of points removed.
9  counter=0; % Total number of passes.
10
11 while counter<20
12
13     counter=counter+1;
14     npr=0; % Number of points removed in each pass.
15
16     for i=3:length(eta_in)-3
17         if abs((eta_out(i+1)-eta_out(i))/(t(i+1)-t(i)))>Threshold
18             eta_out(i)=NaN;
19             eta_out(i+1)=NaN;
20             eta_out(i+2)=NaN;
21             eta_out(i-1)=NaN;
22             eta_out(i-2)=NaN;
23             npr=npr+5;
24         end
25     end
26
27     np=np+npr;
28
29     fprintf('Pass %2d, removed %6d spikes.\n',counter,npr)
30 end
31 fprintf('Removed totally %6d spikes.\n',np)
32 end

```

A.3.6 InterpolateSpikes

```
1 function eta_out=InterpolateSpikes(eta_in,t,Threshold)
2 % eta_in is a Nx1 vector with surface elevation data,
3 % t is a Nx1 vector with the time.
4 % Threshold is the maximum slope between two datapoints.
5 % Interpolation method is 'pchip' default
6
7 eta_out=eta_in;
8
9 np=0; % Total number of points removed.
10 counter=0; % Total number of passes.
11
12 while counter<20
13
14     counter=counter+1;
15     npr=0; % Number of points removed in each pass.
16
17     for i=3:length(eta_in)-3
18         if abs((eta_out(i+1)-eta_out(i))/(t(i+1)-t(i)))>Threshold
19             eta_out(i)=NaN;
20             eta_out(i+1)=NaN;
21             eta_out(i+2)=NaN;
22             eta_out(i-1)=NaN;
23             eta_out(i-2)=NaN;
24             npr=npr+1;
25         end
26     end
27
28     np=np+npr;
29
30     index = find(isnan(eta_out));
31     eta_out(index)=interp1(find(~isnan(eta_out)),...
32         eta_out(~isnan(eta_out)), index, 'pchip');
33 end
34 end
```

Tillegg B

Resultater

B.1 Konfidensintervall

Tabell B.1, B.2 og B.3 viser en oversikt over maksimum og minimum størrelse på konfidensintervallene i figur 5.11-5.21 for henholdsvis varians, skjevhet og kurtose.

Tidsserie	Posisjon 1		Posisjon 2		Posisjon 3		Posisjon 4	
	max	min	max	min	max	min	max	min
1	0,0028	0,0022	0,0023	0,0015	0,0023	0,0015	0,0023	0,0014
2	0,0028	0,0022	0,0023	0,0015	0,0023	0,0015	0,0023	0,0015
3	0,0028	0,0024	0,0027	0,0017	0,0027	0,0016	0,0027	0,0016
4	0,0026	0,0021	0,0029	0,0016	0,0028	0,0018	0,0029	0,0016
5	0,0019	0,0016	0,0023	0,0014	0,0023	0,0014	0,0023	0,0014
6	0,0043	0,0038	0,0038	0,0029	0,0037	0,0029	0,0037	0,0029
7	0,0053	0,0047	0,0047	0,0036	0,0047	0,0037	0,0047	0,0037
8	0,0064	0,0058	0,0057	0,0045	0,0057	0,0044	0,0057	0,0044
9	0,0072	0,0064	0,0064	0,0050	0,0064	0,0051	0,0064	0,0051
10	0,0097	0,0086	0,0087	0,0069	0,0086	0,0069	0,0086	0,0070
11	0,0107	0,0096	0,0097	0,0078	0,0095	0,0078	0,0094	0,0078

Tabell B.1: Konfidensintervall varians

Tidsserie	Posisjon 1		Posisjon 2		Posisjon 3		Posisjon 4	
	max	min	max	min	max	min	max	min
1	0,0268	0,0237	0,0291	0,0232	0,0306	0,0234	0,0292	0,0232
2	0,0243	0,0227	0,0256	0,0210	0,0260	0,0209	0,0258	0,0213
3	0,0245	0,0221	0,0298	0,0219	0,0299	0,0216	0,0287	0,0217
4	0,0244	0,0220	0,0336	0,0216	0,0342	0,0217	0,0325	0,0218
5	0,0235	0,0211	0,0315	0,0210	0,0368	0,0208	0,0313	0,0209
6	0,0285	0,0257	0,0320	0,0275	0,0310	0,0282	0,0308	0,0280
7	0,0286	0,0240	0,0270	0,0239	0,0280	0,0239	0,0276	0,0241
8	0,0278	0,0252	0,0265	0,0231	0,0263	0,0234	0,0271	0,0234
9	0,0284	0,0252	0,0259	0,0237	0,0259	0,0235	0,0262	0,0234
10	0,0284	0,0250	0,0276	0,0232	0,0276	0,0236	0,0280	0,0233
11	0,0266	0,0241	0,0279	0,0214	0,0269	0,0214	0,0275	0,0214

Tabell B.2: Konfidensintervall skjevhet

Tidsserie	Posisjon 1		Posisjon 2		Posisjon 3		Posisjon 4	
	max	min	max	min	max	min	max	min
1	0,0670	0,0472	0,1026	0,0470	0,1145	0,0473	0,1012	0,0459
2	0,0534	0,0420	0,0734	0,0370	0,0800	0,0365	0,0802	0,0378
3	0,0522	0,0392	0,1154	0,0394	0,1180	0,0397	0,1064	0,0391
4	0,0524	0,0394	0,1595	0,0384	0,1704	0,0388	0,1493	0,0382
5	0,0477	0,0379	0,1439	0,0368	0,1434	0,0358	0,1425	0,0366
6	0,0802	0,0580	0,1073	0,0671	0,0932	0,0689	0,0933	0,0678
7	0,1174	0,0475	0,0629	0,0485	0,0708	0,0475	0,0671	0,0486
8	0,0754	0,0533	0,0659	0,0459	0,0612	0,0462	0,0666	0,0453
9	0,0775	0,0494	0,0651	0,0464	0,0655	0,0455	0,0616	0,0455
10	0,0700	0,0497	0,0787	0,0443	0,0784	0,0454	0,0819	0,0449
11	0,0685	0,0473	0,0896	0,0377	0,0825	0,0369	0,0836	0,0375

Tabell B.3: Konfidensintervall kurtose

Bibliografi

- ALBER, I.E. 1978 The effects of randomness on the stability of two-dimensional surface wavetrains. *Proc. R. Soc. Lond. A.* **363**, 525–546.
- BANNER, ENGINEERING CORP. 2013 *U-GAGE S18U Series Sensors with Analog Output*. Minneapolis, U.S.A.
- BUNNIK, T. 2010 Benchmark workshop on numerical wave modelling—description of test cases, Technical Report 70222-1-RD. Marin, The Netherlands.
- DEVORE, J.L. & BERK, K.N. 2007 *Modern Mathematical Statistics with Applications*. Brooks/Cole.
- DJORDEVIĆ, V.D. & REDEKOPP, L.G. 1978 On the Development of Packets of Surface Gravity Waves Moving Over an Uneven Bottom. *J. Appl. Math. Phys.* **29**, 950–962.
- DYSTHE, K., KROGSTAD, H.E. & MÜLLER, P. 2008 Oceanic Rogue Waves. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **40**, 287–310.
- GJEVIK, B. 2009 Innføring i fluidmekanikk MEK3230/4230. Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo.
- GJEVIK, B., PEDERSEN, G.K. & TRULSEN, K. 2010 Lecture Notes MEK4320 Hydrodynamic Wave Theory. Department of Mathematics, University of Oslo.
- GODA, Y. 2000 *Random Seas and Design of Maritime Structures*. World Scientific.
- GRAMSTAD, O., ZENG, H., TRULSEN, K. & PEDERSEN, G.K. 2013 Freak waves in weakly nonlinear unidirectional wave trains over sloping bottom in shallow water. *Phys. Fluids* **25**, 122103.
- HASSELMANN, K., BARNETT, T.P., BOUWS, E., CARLSON, H., CARTWRIGHT, D.E., ENKE, K., EWING, J.A., GIENAPP, H., HASSELMANN, D.E., KRUSEMAN, P., MEERBURG, A., MULLER, P., OLBERS, D.J., RICHTER, K., SELL, W. & WALDEN, H. 1973 Measurements of Wind-Wave Growth and Swell Decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP). Dtsch. Hydrogr. Inst., Hamburg.
- HAYER, S. 2004 A Possible Freak Wave Event Measured at the Draupner Jacket January 1 1995. Marine Structures and Risers, Statoil ASA, N-4035 Stavanger, Norway.
- JANSSEN, P.A.E.M. 2009 On the consequences of the canonical transformation in the Hamiltonian theory of water waves. *J. Fluid Mech.* **637**, 1–44.
- JANSSEN, P.A.E.M. & ONORATO, M. 2007 The Intermediate Water Depth Limit of the Zakharov Equation and Consequences for Wave Prediction. *J. Phys. Oceanogr.* **37**, 2389–2400.

- KHARIF, C., PELINOVSKY, E. & SLUNYAEV, A. 2009 *Rogue Waves in the Ocean*. Springer.
- KROGSTAD, H.E. & ARNTSEN, Ø.A. 2000 Linear Wave Theory, Part B. Norwegian University of Science and Technology, Trondheim.
- LAMB, H. 1932 *Hydrodynamics*. Dover.
- LIU, P.L.-F. & DINGEMANS, M.W. 1989 Derivation of the Third-Order Evolution Equations for Weakly Nonlinear Water Waves Propagating over Uneven Bottoms. *Wave Motion* **11**, 41–64.
- MORI, N. & JANSSEN, P.A.E.M. 2006 On Kurtosis and Occurrence Probability of Freak Waves. *J. Phys. Oceanogr.* **36**, 1471–1483.
- OCHI, M.K. 1998 *Ocean Waves: The Stochastic Approach*. Cambridge Ocean Technology Series 6. Cambridge: Cambridge University Press.
- PEELINOVSKY, E. & SERGEEVA, A. 2006 Numerical modeling of the KdV random wave field. *European Journal of Mechanics B/Fluids* **25**, 425–434.
- SERGEEVA, A., PELINOVSKY, E. & TALIPOVA, T. 2011 Nonlinear random wave field in shallow water: variable Korteweg–de Vries framework. *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* **11**, 323–330.
- SROKOZS, M.A. & LONGUET-HIGGINS, M.S. 1986 On the skewness of sea-surface elevation. *J. Fluid Mech.* **164**, 487–497.
- STORVIK, G. 2011 Bootstrapping—Tilleggs litteratur for STK2120. Universitetet i Oslo.
- TAKLO, T.M.A. 2012 How well is the linear dispersion relation satisfied for laboratory waves? Master’s thesis, University of Oslo.
- TRULSEN, K. 2006 *Tsunamis, rogue waves, internal waves and internal tides*, chap. Weakly nonlinear and stochastic properties of ocean wave fields. Application to an extreme wave event, pp. 49–106. Springer Wien New York.
- TRULSEN, K., ZENG, H. & GRAMSTAD, O. 2012 Laboratory Evidence of freak waves provoked by non-uniform bathymetry. *Phys. Fluids* **24**, 097101.
- ZENG, H. 2012 Evolution of statistics of weakly nonlinear unidirectional waves over a sloping bottom. Ph.D. thesis, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Oslo.
- ZENG, H. & TRULSEN, K. 2012 Evolution of skewness and kurtosis of weakly nonlinear unidirectional waves over a sloping bottom. *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* **12**, 631–638.

Figurer

1.1	Gruppehastighet som funksjon av kh (—), dybden $kh = 1,363$ (—). Trulsen <i>et al.</i> (2012): «case 1», «case 2» og «case 3» rød heltrukken linje (—). Gramstad <i>et al.</i> (2013): simuleringer blå heltrukken linje (—) i tillegg til nevnte tre «case». Zeng & Trulsen (2012): bølgene kommer fra dyp $kh = 10$ som ikke er vist i denne figuren, grunn del vist med cyan heltrukken linje (—). Sergeeva <i>et al.</i> (2011), gul heltrukken linje (—).	2
1.2	Skisse av rampe som skal plasseres på bunnen av bølgetanken. H høyde til rampe, h_1 dypt vanndyp, h_2 grunt vanndyp, $\frac{\partial h}{\partial x} = 0,2625$	4
3.1	Ikke-uniform bunn, kvadratisk step	18
3.2	Refleksjons- og transmisjonskoeffisienter for kvadratisk step.	20
3.3	Ikke-uniform bunn, skrånende step	21
3.4	Refleksjons- og transmisjonskoeffisienter for skrånende step.	26
4.1	Draupner-tidsserien.	44
4.2	Konvergens av statistikk for Draupner-tidsserie.	45
4.3	95% konfidensintervall for forventningsverdi, varians, skjevhet og kurtose for Draupner-tidsserien.	45
4.4	Kurtose med 95% konfidensintervall for MARIN-data	46
4.5	Fra venstre: overskridelsessannsynlighet for de 40000 første punktene i tidsserien, 70000 første punktene i tidsserien og for hele tidsserien til MARIN case 3 probe 15.	47
4.6	Eksperimentelt oppsett.	48
4.7	Prober, step og overflatehevning.	49
4.8	Prober	50
4.9	Overflatehevningen ved oppstart av bølgegeneratoren for tidsserie 5 probe 10, 12 og 15.	52
4.10	Overflatehevningen filtrert med de ulike filterene med interpolasjon.	53
4.11	Overflatehevningen filtrert med de ulike filterene uten interpolasjon.	54
5.1	$k_p a_c$ plottet mot $k_p h$ for alle tidsserier.	57
5.2	Ur plottet mot $k_p h$ for alle tidsserier.	57
5.3	Varians for alle tidsserier sortert etter stigende $k_p h$ på den grunne delen av steppet. Vertikale stiplede linjer angir posisjonen til steppet.	58
5.4	Steilhet for alle tidsserier sortert etter stigende $k_p h$ på den grunne delen av steppet. Vertikale stiplede linjer angir posisjonen til steppet.	58
5.5	Ursell-parameteren for alle tidsserier sortert etter stigende $k_p h$ på den grunne delen av steppet. Vertikale stiplede linjer angir posisjonen til steppet.	59
5.6	Skjevhet for alle tidsserier sortert etter stigende $k_p h$ på den grunne delen av steppet. Vertikale stiplede linjer angir posisjonen til steppet.	60

5.7	Kurtose for alle tidsserier sortert etter stigende $k_p h$ på den grunne delen av steppet. Vertikale stiplede linjer angir posisjonen til steppet.	60
5.8	$P(H > 2H_s)$ for alle tidsserier sortert etter stigende $k_p h$ på den grunne delen av steppet. Svart heltrukken linje angir den teoretiske Rayleigh-fordelingen for bølgehøyden. Vertikale stiplede linjer angir posisjonen til steppet.	61
5.9	Tidsserie 4: varians, skjevhet og kurtose med 95% konfidensintervall beregnet fra overflatehevning med (svart) og uten (grønn) hull. Vertikale stiplede linjer angir posisjonen til steppet.	62
5.10	Samme som figur 5.9 for tidsserie 5.	62
5.11	Tidsserie 1: varians, skjevhet og kurtose med 95% konfidensintervall, steilhet, Ursell-parameteren og freakbølgesannsynlighet. Sirkler angir analytisk skjevhet og horisontal heltrukken svart linje angir analytisk kurtose, begge til andre orden. Vertikale stiplede linjer angir posisjonen til steppet.	64
5.12	Samme som figur 5.11 for tidsserie 2.	65
5.13	Samme som figur 5.11 for tidsserie 3.	65
5.14	Samme som figur 5.11 for tidsserie 4.	66
5.15	Samme som figur 5.11 for tidsserie 5.	66
5.16	Samme som figur 5.11 for tidsserie 6.	67
5.17	Samme som figur 5.11 for tidsserie 7.	67
5.18	Samme som figur 5.11 for tidsserie 8.	68
5.19	Samme som figur 5.11 for tidsserie 9.	68
5.20	Samme som figur 5.11 for tidsserie 10.	69
5.21	Samme som figur 5.11 for tidsserie 11.	69
5.22	x -verdi (avstand fra bølgegenerator) for posisjonene til γ_{max} , γ_{min} og κ_{max} . Horisontale stiplede linjer angir posisjonen til steppet.	71
5.23	Avstanden normalisert med bølgelengden fra posisjonene γ_{max} og κ_{max} til der grunn del av steppet starter.	71
5.24	Overskridelsessannsynlighet for bølgehøyde for posisjonene til γ_{max} (venstre) og γ_{min} (høyre) for tidsserie 1–5. Den smaleste kurven er den teoretiske Rayleigh-fordelingen.	72
5.25	Overskridelsessannsynlighet for bølgehøyde for posisjonene til γ_{max} (venstre) og γ_{min} (høyre) for tidsserie 7–11. Den smaleste kurven er den teoretiske Rayleigh-fordelingen.	73
6.1	Gruppehastighet som funksjon av $kh(—)$, dybden $kh = 1,363 (---)$. Trulsen <i>et al.</i> (2012): «case 1», «case 2» og «case 3» rød heltrukken linje ($---$). Gramstad <i>et al.</i> (2013): simuleringer blå heltrukken linje ($---$) i tillegg til nevnte tre «case». Zeng & Trulsen (2012): bølgene kommer fra dyp $kh = 10$ som ikke er vist i denne figuren, grunn del vist med cyan heltrukken linje ($---$). Sergeeva <i>et al.</i> (2011), gul heltrukken linje ($---$). Grønn heltrukken linje ($---$) viser eksperimentene utført i denne oppgaven.	76
A.1	Kalibreringskurve for probe 15	86

Tabeller

1.1	$L = 1,6$ m, $H = 0,42$ m, $h_1 = 0,5$ m. Indeks 1 angir dypt vann, indeks 2 angir grunt vann.	5
1.2	$L = 1,6$ m, $H = 0,42$ m, $h_1 = 0,6$ m. Indeks 1 angir dypt vann, indeks 2 angir grunt vann.	5
5.1	Tillegg til tabell 1.2, $L = 1,6$ m, $H = 0,42$ m, $h_1 = 0,6$ m. Indeks 1 angir dypt vann, indeks 2 angir grunt vann.	55
5.2	Alle tidsserier. Indeks 1 angir dypt vann, indeks 2 angir grunt vann.	56
6.1	Karakteristiske størrelser for tidligere arbeider. Indeks 1 angir dypt vann, indeks 2 angir grunt vann.	77
B.1	Konfidensintervall varians	91
B.2	Konfidensintervall skjevhet	92
B.3	Konfidensintervall kurtose	92